అర్థశాస్త్రంలో గణిత పద్ధతులు

ఎం.ఏ. - ఎకనామిక్స్, మొదటి సంవత్సరం - ఐదవ పేపరు

రచయితలు

ఆచార్య డి. కృష్ణమూర్తి,
ఎం.ఏ.,పిహెచ్.డి.
అర్థశాస్త్ర విభాగం
శ్రీ వేంకటేశ్వర విశ్వవిద్యాలయం, తిరుపతి

డా॥ కర్రి కిషోర్ బాబు,
ఎం.ఏ., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
ఫ్యాకల్టీ ఆఫ్ ఎకనామిక్స్
అర్థశాస్త్ర విభాగం,
ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం, గుంటూరు.

సంపాదకులు

ఆచార్య డి. కృష్ణమూర్తి,
ఎం.ఏ.,పిహెచ్.డి.
అర్థశాస్త్ర విభాగం
శ్రీ వేంకటేశ్వర విశ్వవిద్యాలయం, తిరుపతి

సమన్వయకర్త

డా॥ కడిమి మధుబాబు
ఎం.ఏ., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
అర్థశాస్త్ర విభాగం
శ్రీ వేంకటేశ్వర విశ్వవిద్యాలయం, తిరుపతి

Director
Dr. NAGARAJU BATTU
M.B.A., M.H.R.M., L.L.M., M.Sc. (Phy), M.A. (Soc.)., M.Ed., M.Phil., Ph.D.
Dept. of HRM

దూర విద్యా కేంద్రము

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం, నాగార్జున నగర్ - 522 510.
Ph: 0863-2293299, 2293356 (08645), 211023, 211024 (Study Material)
Cell : 98482 85518
E-mail : Info@anucde.ac.in
Website: www.anucde.ac.in (or) www.anucde.info

M.A. Economics : Mathematical Methods

Edition: 2021

No. of Copies: 246

Published by:

Dr. NAGARAJU BATTU

Director

Centre for Distance Education

Acharya Nagarjuna University

Printed at:

Romith Technologies

Guntur.

ముందుమాట

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం 1976లో స్థాపించినది మొదలు నేటి వరకు ప్రగతిపథంలో పయనిస్తూ వివిధ కోర్సులు, పరిశోధనలు అందిస్తూ 2016 నాటికి NAAC చే A గ్రేడును సంపాదించుకొని దేశంలోనే ఒక ప్రముఖ విశ్వవిద్యాలయంగా గుర్తింపు సాధించుకొన్నదని తెలియజేయటానికి సంతోషిస్తున్నాను. ప్రస్తుతం గుంటూరు, ప్రకాశం జిల్లాలలోని 447 అనుబంధ కళాశాలల విద్యార్థులకు డిప్లమో, డిగ్రీ, పి.జి. స్థాయి విద్యాబోధనను ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం అందిస్తోంది.

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం ఉన్నత విద్యను అందరికి అందించాలన్న లక్ష్యంతో 2003-04లో దూరవిద్యా కేంద్రాన్ని స్థాపించింది. పూర్తి స్థాయిలో కళాశాలకు వెళ్ళి విద్యనభ్యసించలేని వారికి, వ్యయభరితమైన ఫీజులు చెల్లించలేని వారికి, ఉన్నత విద్య చదవాలన్న కోరిక ఉన్న గృహిణులకు ఈ దూర విద్యా కేంద్రం ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది. ఇప్పటికే డిగ్రీ స్థాయిలో బి.ఏ., బి.కాం., బి.ఎస్.సి., మరియు పి.జి. స్థాయిలో ఎం.ఏ., ఎం.కాం., ఎం.ఎస్.సి., ఎం.బి.ఏ., ఎల్.ఎల్.యమ్., కోర్సులను ప్రారంభించిన విశ్వవిద్యాలయం గత సంవత్సరం కొత్తగా 'జీవన నైపుణ్యాలు' అనే సర్టిఫికేట్ కోర్సును కూడా ప్రారంభించింది.

ఈ దూర విద్యా విధానం ద్వారా విద్యనభ్యసించే విద్యార్థుల కొరకు రూపొందించే పాఠ్యాంశాలు, సులభంగాను, సరళంగాను, విద్యార్థి తనంతట తానుగా అర్థం చేసుకొనేలా ఉండాలనే ఉద్దేశ్యంతో విశేష బోధనానుభవం కలిగి, రచనా వ్యాసంగంలో అనుభవం గల అధ్యాపకులతో పాఠ్యాంశాలను వ్రాయించడం జరిగింది. వీరు ఎంతో నేర్పుతో, నైపుణ్యంతో, నిర్ణీత సమయంలో పాఠ్యాంశాలను తయారు చేశారు. ఈ పాఠ్యాంశాల పై విద్యార్థినీ, విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయులు నిష్ణాతులైన వారు ఇచ్చే సలహాలు, సూచనలు సహృదయంతో స్వీకరించబడతాయి. నిర్మాణాత్మకమైన సూచనలను గ్రహించి ముమ్ముందు మరింత నిర్దిష్టంగా, అర్థమయ్యే రీతిలో ప్రచురణ చేయగలం. ఈ పాఠ్యాంశాల అవగాహన కోసం, సంశయాల నివృత్తి కోసం వారాంతపు తరగతులు, కాంటాక్టు క్లాసులు ఏర్పాటు చేయటం జరిగింది.

దూరవిద్యా కేంద్రం ద్వారా విజ్ఞాన సముపార్జన చేస్తున్న విద్యార్థులు, ఉన్నత విద్యార్హతలు సంపాదించి జీవనయాత్ర సుగమం చేసుకోవడమే గాక, చక్కటి ఉద్యోగావకాశాలు పొంది, ఉద్యోగాలలో ఉన్నత స్థాయికి చేరాలని, తద్వారా దేశ పురోగతికి దోహదపడాలని కోరుకుంటున్నాను. రాబోయే సంవత్సరాలలో దూర విద్యా కేంద్రం మరిన్ని కొత్త కోర్సులతో దినదినాభివృద్ధి చెంది, ప్రజలందరికి అందుబాటులో ఉండాలని ఆకాంక్షిస్తున్నాను. ఈ ఆశయ సాధనకు సహకరిస్తున్న, సహకరించిన దూరవిద్యా కేంద్రం డైరెక్టర్లకు, సంపాదకులకు, రచయితలకు, అకడమిక్ కో-ఆర్డినేటర్లకు మరియు అధ్యాపకేతర సిబ్బందికి నా అభినందనలు.

ప్రొఫెసర్ పి. రాజశేఖర్, M.A., M.Phil., Ph.D.
కులపతి (FAC)
ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం

విషయ సూచిక

M.A. ECONOMICS

SEMESTER -I

PAPER V: MATHEMATICAL METHODS

MODULE 1 :

Concept of Function, Types of Functions - Graphical Representation of function –Limit and continuity of a function – Concept of Straight line - Applications in Economics.

MODULE 2 :

Concept of derivative - Rules of differentiation – Interpretation of revenue, cost, demand, supply, functions; Elasticities and their types

MODULE 3 :

Multivariable functions; Rules of partial differentiation; Problems of maxima and minima in single and multiple variables; Simple problems in market equilibrium;

MODULE 4 :

Total derivatives, Indifference curve analysis etc., Concept of integration; Simple rules of integration; Application to consumer's surplus and producer's surplus.

MODULE 5 :

Matrix Theory – Matrices and Determinants – Inverse of Matrix - and Cramer's Rule to Solve the System of Simultaneous Equation System - Input-Output analysis; Meaning-Types-Assumptions; Review exercises.

Reference :

1. Vohara, Quantitative Techniques, Tata McGraw Hill, 2^{nd} ed., 2001.
2. D.C.Sancheti and V.K.Kapoor, Business Mathematics.
3. S.C. Gupta Fundamentals of statistics.
4. K.Chandra Sekhar, Business of statistics.

భాగం - 1

పాఠము - 1
ప్రమేయాలు: వాటి రకాలు

1.0 పాఠం ఆశించు ఫలితాలు

ఈ పాఠం చదివిన తర్వాత, మీరు

i) సమితి, అంటే ఏమిటి, కార్టేసియన్ లబ్ధం అంటే ఏమిటి, వాటి ప్రాముఖ్యతను వివరించగలరు;

ii) సంబంధం ప్రమేయం భావనలను గూర్చి విపులంగా చర్చించగలరు

iii) వివిధ రకాల 'బహుపది ప్రమేయాలను, అర్థశాస్త్రంలో వాటి అనువర్తనాలను గూర్చి తెలుసుగోగలరు;

vi) వివిధ రకాల ప్రమేయాల సమీకరణాలను వ్రాయగలరు, వాటి రేఖలను గీయగలరు;

1.1 పరిచయం

అర్థశాస్త్రంలో గణిత పద్ధతుల ముఖ్యమైన అనువర్తనాల్లో ఒకటి ప్రమేయాలు. కారణం, ఫలితం కలిగించే పద్ధతిలో రెండు చలరాసులు సంబంధం కలిగి ఉన్నప్పుడల్లా, రెండు చలరాసులు మధ్య క్రియాత్మక సంబంధం ఉందని మనం గుర్తించాలి. ఒక వస్తువు యొక్క ప్రయోజనం వినియోగించే వస్తువు యొక్క పరిమాణాలపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. ఒక వస్తువు డిమాండ్ మరియు సరఫరా దాని ధరపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక వస్తువు ఉత్పత్తి వ్యయం, దాని ఉత్పత్తి స్థాయిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక సంస్థ లాభాలు ఆ వస్తువు ఉత్పత్తి వ్యయం, రాబడి పై ఆధారపడి ఉంటాయి. ఈ విదంగా, ఈ ఆర్థిక చలరాసులు అన్నీ ఒకదానికొకటి క్రియాత్మకంగా సంబంధం కలిగి ఉంటాయి. చలరాసులు మధ్య క్రియాత్మక సంబంధం భావనను తెలుసుకోవాలంటే, మనం ప్రమేయం అనే భావనను తెలుసుకోవాలి. కానీ ప్రమేయం, వివిధ రకాల ప్రమేయాలను అర్థం చేసుకోవడానికి, సమితి, అంటే ఏమిటి, కార్టేసియన్ లబ్ధం సంబంధం ప్రమేయం భావనలను, గురించి తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంది. కాబట్టి, ఆర్థిక శాస్త్రంలో ప్రమేయం వాటి అనువర్తనాల భావనను చేపట్టే ముందు ఈ భావనలను క్లుప్తంగా తెలుసుకుందాం.

1.2 సమితి, కార్టీసియన్ లబ్ధం, సంబంధం, భావనలు

సమితి అంటే బాగా నిర్వచించబడిన, బాగా గుర్తించబడిన వస్తువుల సమాహారం అని మనకు తెలుసు. సమితి ఉదాహరణలు 'అన్ని ధనాత్మక పూర్ణాంకాల సమితి', 'అన్ని రుణాత్మక పూర్ణాంకాల సమితి", 'ఇంగ్లీష్ అక్షరాలలో అచ్చుల సమితి', '1 నుండి 6 వరకు అంకెలు పొందిన రెండు నిష్పాక్షికమైన పాచికలు చుట్టడం ద్వారా ముఖాలపై పొందిన సంఖ్యల సమితి' మొదలైనవి.

చివరి ఉదాహరణలో తెలియజేసినట్లు, రెండు విభిన్న ప్రయోగాలు ద్వారా పొందబడిన రెండు వేర్వేరు సమితిలు ఉంటే, మొదటి సమితి నుండి మొదటి మూలకాన్ని, రెండవ సమితి నుండి రెండవ మూలకాన్ని తీసుకొని మనం క్రమబద్ధ చేసిన జతలను (Ordered pairs) ఏర్పరచవచ్చు. వీటిని **'క్రమ యుగ్మయాలు'** అని కూడా పిలుస్తారు.

క్రమబద్ధ చేసిన జతలను కలిగి ఉన్న ఈ సమితిని కార్టీసియన్ లబ్ధం సమితిని - P అంటారు.

ఉదాహరణ: మొదటి సమితి సంఖ్యలు X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

రెండవ సమితి సంఖ్యలు Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

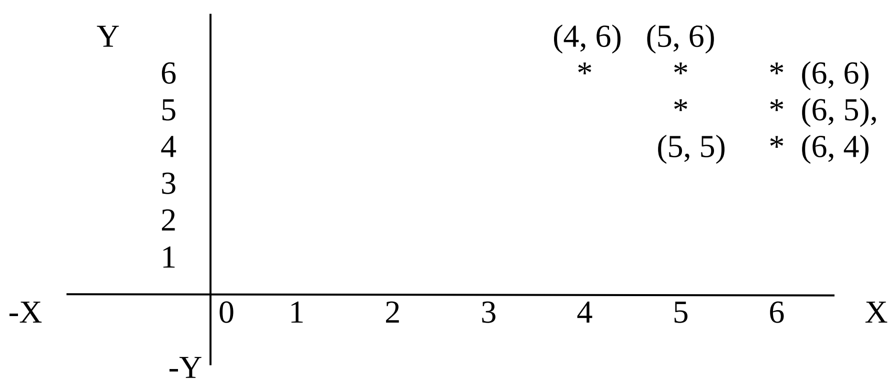
ఈ రెండు సమితిలను బట్టి, కార్టేసియన్ లబ్ధం సమితి(P)ని ఈ క్రింది విధంగా రూపొందించవచ్చు:

$$P = X * Y = \left\{ \begin{array}{l} \{(1, 1)\ (1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (1, 5)\ (1, 6)\} \\ \{2, 1)\ (2, 2)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (2, 5)\ (2, 6)\} \\ \{(3, 1)\ (3, 2)\ (3, 3)\ (3, 4)\ (3, 5)\ (3, 6)\} \\ \{(4, 1)\ (4, 2)\ (4, 3)\ (4, 4)\ (4, 5)\ (,6)\} \\ \{(5, 1)\ (5, 2)\ (5, 3)\ (5, 4)\ (5, 5)\ (5, 6)\} \\ \{(6, 1)\ (6, 2)\ (6, 3)\ (6, 4)\ (6, 5)\ (6, 6)\} \end{array} \right\}$$

పై కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితిలో 6 x 6 = 36 క్రమబద్ధ జంటలు ఉన్నాయి. ఈ 36 క్రమబద్ధ జతలను నాలుగు క్వాడ్రంట్ X-Y ప్లేన్‌లో చుక్కలు లేదా బిందువులుగా సూచించవచ్చు. ఈ మొత్తం లబ్ధ సమితి నుంచి, కొన్ని షరతులను ఆదారంగా ఉప సమితిలు ఉత్పన్నం చేయవచ్చు. ఇచ్చిన షరతును సంతృప్తిపరిచే క్రమబద్ధ జంటలు కార్టేసియన్ లబ్ధ సమితిలో ఒక భాగం లేదా ఉప-సమితి. ఈ ఉప-సమితిని రిలేషన్ లేదా సంబంధం అంటారు. ఉదాహరణకు, మొదటి పాచిక, రెండవ పాచికలలో ఉన్న విలువల మొత్తం 9 కంటే ఎక్కువగా ఉండాలనే షరతును తీసుకుందాం. చిహ్నాలలో, దీనిని x + y > 9 గా పేర్కొనవచ్చు. ఈ ఇచ్చిన షరతును సంతృప్తిపరిచే క్రమబద్ధ జంటలు (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5) (6,6). మనం ఈ క్రమబద్ధ జంటలను సమితిగా భావించి, వాటిని, సంబంధంగా పిలుద్దాం. ఈ సంబంధం కార్టేసియన్ లబ్ధ సమితి యొక్క ఉప-సమితి,

P = X *Y.

$R \subseteq P = \{X*Y\}/x + y>9 = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5)\ (6,6)\}$

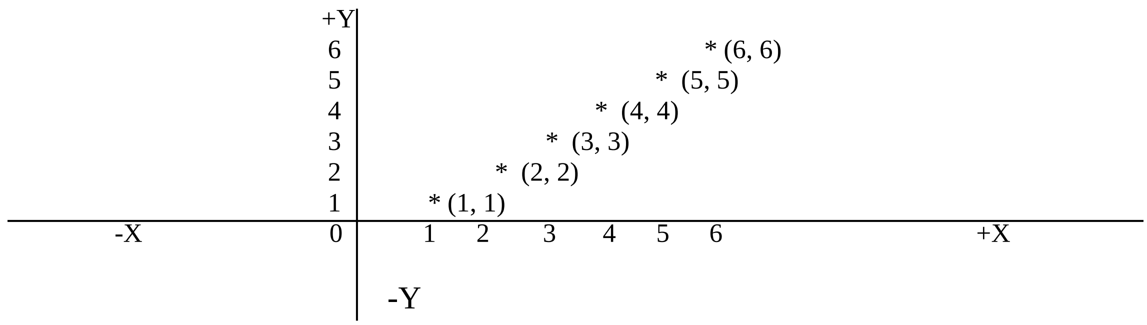


పై ఉదాహరణలో, X-విలువ 4 మినహా, అన్ని ఇతర X- విలువలకు, ఒకటి కంటే ఎక్కువ Y విలువలు జతపరచి ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు, 5 యొక్క X-విలువ కోసం, (5, 5), (5, 6) వంటి రెండు Y-విలువలు ఉన్నాయి. అదేవిధంగా, 6 యొక్క X-విలువ కోసం, (6, 4), (6, 5), (6, 6) వంటి మూడు Y-విలువలు ఉన్నాయి.

మనం మరొక షరతును తీసుకుందాం, X = Y. ఈ షరతును సంతృప్తిపరిచే క్రమబద్ధ జంటలు (1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6) . ఇది కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితి యొక్క ఉపసమితి.

$$R \subseteq P = \{X*Y\}/x = y = \{(1, 1)\ (2, 2)\ (3, 3)\ (4, 4)\ (5, 5)\ (6, 6)\}$$

ఈ క్రమబద్ధ జంటలను నాలుగు-క్వాడ్రంట్ X-Y ప్లేన్‌లో సూచించవచ్చు.



మునుపటి సంబంధానికి భిన్నంగా ఈ సంబంధం యొక్క స్వభావం మరియు ప్రాముఖ్యత గురించి చర్చిద్దాం.

1.3 ప్రమేయం: భావన, రకాలు

కార్టేసియన్ లబ్ధ సమితి యొక్క ఉప-సమితి అయిన పై సంబంధంలో, ప్రతి Y-విలువ ఒక X-విలువతో అనుబంధించబడుతుంది. కార్టేసియన్ లబ్ధ సమితి యొక్క ఈ ఉప-సమితి, "ఫంక్షన్ లేదా ప్రమేయం" అని పిలువబడుతుంది. అందువల్ల, ఒక సంబంధంలో, ప్రతి X-విలువకు లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ X-విలువలకు, ఒకే ఒక (ప్రత్యేకమైన) Y-విలువ ఉంటే, ఆ నిర్దిష్ట సంబంధాన్ని “ప్రమేయం” అంటారు. లేకుంటే అది కేవలం సంబంధం మాత్రమే. కాబట్టి, ఒక ప్రమేయం అనేది సంబంధం యొక్క ప్రత్యేక సందర్భం. మొదటి ఉదాహరణలోని సంబంధం ఒక ప్రమేయం కాదు. ఇది ఒక సంబంధం మాత్రమే. మరోవైపు, రెండవ ఉదాహరణలోని సంబంధం ఒక ప్రమేయం. Y = f(X)తో సూచించబడే ప్రమేయం, మ్యాపింగ్ లేదా రూపాంతరం అని కూడా పిలుస్తారు, ఈ రెండు పదాలు, ఒక విలువను మరొక విలువతో అనుబంధించే చర్యను సూచిస్తాయి.

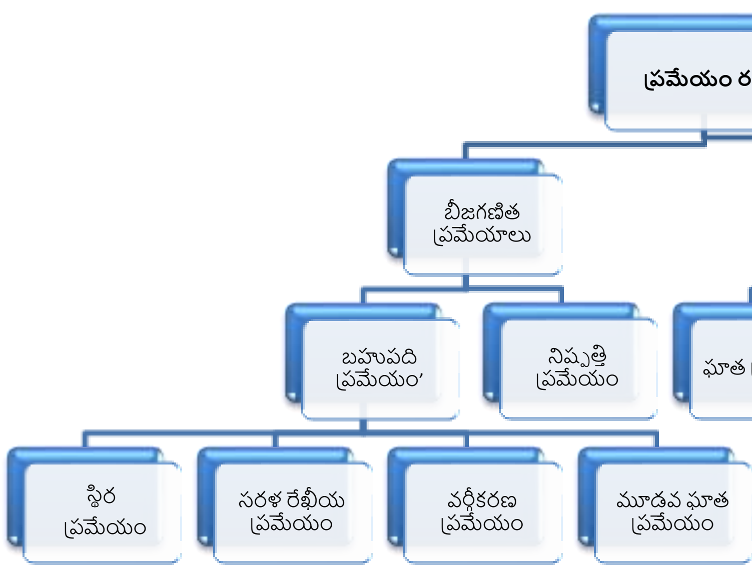
y =f(x) అనే ప్రమేయం వ్యక్తీకరణలో, 'f' అనే అక్షరాన్ని ప్రమేయ నియమంగా అన్వయించవచ్చు, దీని ద్వారా X సమితిని మ్యాప్ చేసి (రూపాంతరం చేసి) Y సమితిలోకి మార్చవచ్చు. మనం దానిని $f: x \rightarrow y$ అని కూడా వ్రాయవచ్చు. ప్రమేయం వ్యక్తీకరణ, y = f (x) అనేది X , Y లకు సంబంధించిన సాధారణ ప్రకటన మాత్రమే. ప్రమేయం యొక్క నిర్దిష్ట నియమాన్ని సూచించదు.

ప్రమేయం భావనను వివరించడానికి, పిండి మిల్లులో పిండి ఆడించే యంత్రాన్ని ఉదాహరణగా తీసుకుందాం. పిండి ఆడించే యంత్రం నుంచి బియ్యం రవ్వ, బియ్యం పిండి, బియ్యం వెర్మిసెల్లి వంటి వివిధ రకాల పదార్థాలను మనం పొందవచ్చు. ఇందులో ఉత్పాదకం (X) బియ్యం అయితే, ఉత్పత్తి (Y)

బియ్యం రవ్వ, బియ్యం పిండి, బియ్యం వెర్మిసెల్లి కావచ్చు. బియ్యం నుంచి వివిధ రకాల ఉత్పత్తిలను పొందడానికి, మనం యంత్రం యొక్క ఎడమ వైపున నుండు చక్రాన్ని వేర్వేరు స్థానాల్లో సర్దుబాటు చేసి వర్తింపజేయాలి. చక్రం బిగించడం లేదా వదులు చేయడం వంటి వివిధ ప్రక్రియలను ప్రమేయ నియమాలు అంటారు. విభిన్న నియమాలను సూచించే వివిధ రకాల ప్రమేయాలను పరిశీలిద్దాం.

ప్రమేయాలను స్థూలంగా రెండు వర్గాలుగా విభజించవచ్చు, అవి బీజగణిత ప్రమేయాలు, (Algebraic Functions) బీజగణితేతర ప్రమేయాలు (Non-Algebraic Functions). వీటిని అతీంద్రియ ప్రమేయాలు అని కూడా పిలుస్తారు. బీజగణిత ప్రమేయాలను మళ్లీ 'బహుపది ప్రమేయం' (Polynomial Function), నిష్పత్తి ప్రమేయంగా (Rational Function) విభజించవచ్చు. 'బహు' అనే పదానికి అనేక అని అర్థం. పది' పదాలను సూచిస్తుంది. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, ఒక ప్రమేయంలో అనేక పదాలు ఉంటే, దానిని 'బహుపది ప్రమేయం ' అంటారు. రెండు బహుపది ప్రమేయాలు ఒకదానికొకటి నిష్పత్తిగా ఉంటే, దానిని "రేషనల్ ఫంక్షన్" అంటారు. 'రేషనల్' అనే పదం 'నిష్పత్తి' అర్థంలో మాత్రమే ఉపయోగించబడింది.. ఆర్థికశాస్త్రంలో మనం విపులంగా మాట్లాడే 'మానవుల ప్రవర్తనలో హేతుబద్ధత'కి సంబంధించిన ఏ అర్థాన్ని అందించదు. అతీంద్రియ ప్రమేయంలు మూడు రూపాలను తీసుకుంటాయి, అవి ఘాతాంక ప్రమేయం (Exponential Function), సంవర్గమాన ప్రమేయం (Logarithmic Function), త్రికోణమితియ ప్రమేయం (Trigonometric Function). బహుపది ప్రమేయం అనేది సాధారణ రకం ప్రమేయం. ఇది స్థిర ప్రమేయం (Constant Function), సరళ రేఖీయ ప్రమేయం, (Linear Function) ఘాత ప్రమేయం(Quadratic Function) మూడవ ఘాత ప్రమేయం (Cubic Function) వంటి అనేక రూపాలను తీసుకుంటుంది. ఈ విభిన్న రకాల ప్రమేయాలను క్రమ పద్ధతిలో కిందిపటంలో సూచించబడ్డాయి:

పటం - 1.1



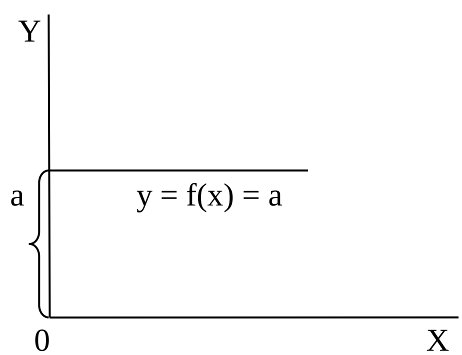
1.3.1 బహుపది ప్రమేయం

బహుపది ప్రమేయం సాధారణ రూపం $Y = a_0+a_1X_1+a_2X_2^2+a_3X_3^3+a_4X_4^4+$…..... దీనిలో ప్రతి పదం ఒక గుణకం a_0, a_1,, మొదలైనవి, రుణాత్మకం కాని ధనపూర్ణాంకం ఘాతంతో ఒక చలరాశిని కలిగి ఉంటుంది. మొదటి రెండు పదాలలో, చలరాశి X యొక్క ఘాతాలు, $X^0 = 1$ and $X^1 = X$. X యొక్క అత్యధిక ఘాతంపై ఆధారపడి, బహుపది ప్రమేయ నాలుగు ఉప-వర్గాలు ఉన్నాయి, అవి స్థిర ప్రమేయం, సరళ రేఖీయ ప్రమేయం, ఘాత ప్రమేయం, మూడవ ఘాత ప్రమేయం. బహుపది యొక్క అత్యధిక ఘాతంని బహుపది ప్రమేయ స్థాయి అంటారు. ఈ నాలుగు రకాల బహుపది ప్రమేయాలను సంబంధిత బీజగణిత, మరియు రేఖా చిత్ర సంజ్ఞామానాలతో పాటు వాటి ఆర్థిక అనువర్తనాలతో చర్చిద్దాం.

1.3.1.1 స్థిర ప్రమేయం

ఒకే ఒక మూలకాన్ని కలిగి ఉండే బహుపది ప్రమేయంను 'స్థిర ప్రమేయం అంటారు. స్థిర ప్రమేయం క్రియాత్మక సంబంధ రూపం $Y = f(X) = a$. ఉదాహరణకు $Y = 10$ లేదా $Y = 200$. ఈ ప్రమేయంలో, X విలువలతో సంబంధం లేకుండా Y విలువ . స్థిరంగా ఉంటుంది. X-Y ప్లేన్‌లో అటువంటి ప్రమేయం X-అక్షానికి సమాంతరంగా సమాంతర సరళ రేఖ వలె కనిపిస్తుంది. 'a'ని అంతరాయ పదం అంటారు. స్థిర ప్రమేయం జియోమితి రూపం పటం - 1.2 లో సూచించబడింది.

పటం - 1.2 స్థిర ప్రమేయం



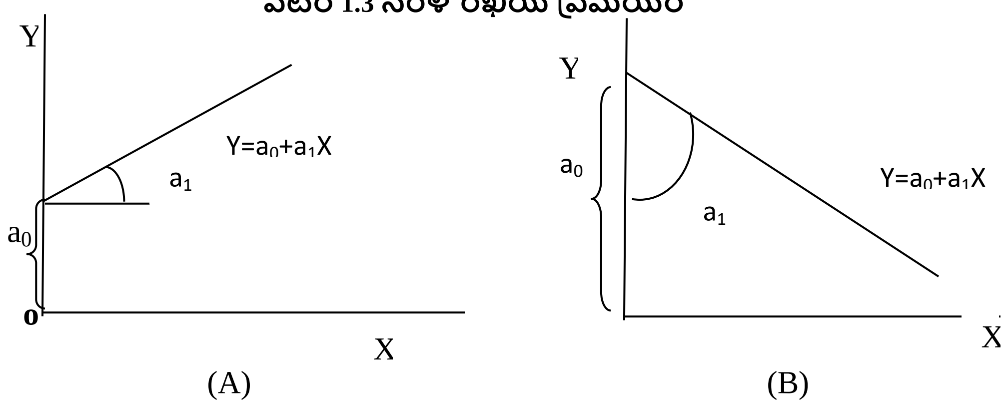
అర్థశాస్త్రంలో స్థిర ప్రమేయంకు అనేక అనువర్తనాలు ఉన్నాయి. సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో సంపూర్ణ వ్యాకోసత్వ డిమాండ్ రేఖ, సప్లై రేఖ ఉత్తమ ఉదాహరణలు. సంపూర్ణమైన పోటీ మార్కెట్లో AR, MR రేఖల విలీనం ఇంకొక ఉత్తమ ఉదాహరణ. స్వయంప్రతిపత్త పెట్టుబడి లేదా వడ్డీ రేటుపై ఆధారపడని ప్రభుత్వం పెట్టుబడి అనేది స్థూల ఆర్థికశాస్త్రం నుండి స్థిర ప్రమేయంకు మరొక ఉదాహరణ.

1.3.1.2 సరళ రేఖీయ ప్రమేయం

రెండు చలరాసుల మధ్య మార్పు నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటే, వాటి మధ్య సరళ రేఖీయ సంబంధం ఉంటుంది. సరళ సంబంధాన్ని సరళ రేఖ సంబంధం అని కూడా అంటారు. సరళ రేఖీయ ప్రమేయ క్రియాత్మక సంబంధ రూపం $Y=a_0+a_1X$. దీన్ని మొదటి బహుపది ప్రమేయ మొదటి క్రమంగా కూడా పిలువబడుతుంది. సరళ రేఖీయ ప్రమేయ జియోమితి రూపం పటం 1.3లో ఇవ్వబడింది.

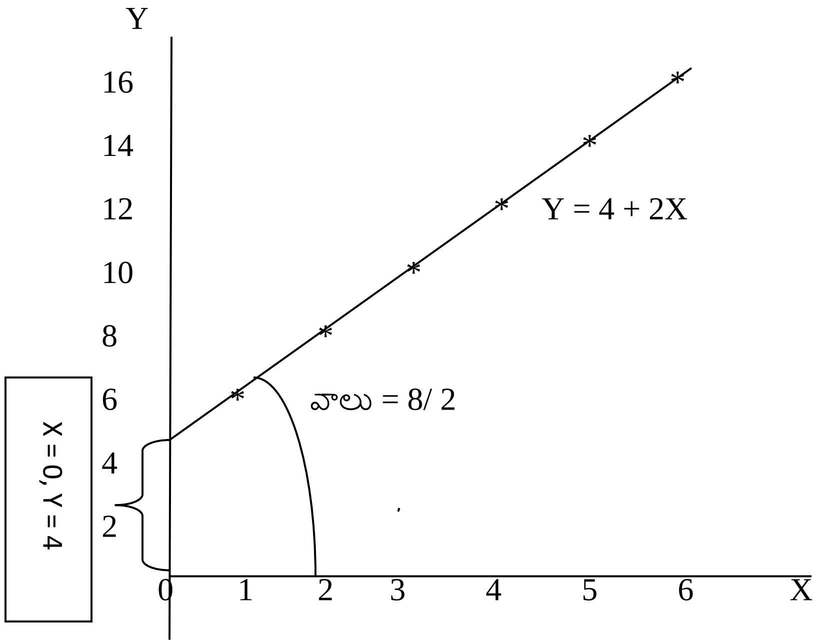
సమీకరణంలో, a_0ని Y-ఇంటర్‌సెప్ట్ లేదా స్థిరాంకం అని పిలుస్తారు. a_1ని వక్రరేఖ గుణకం లేదా వాలు అంటారు. పటం 1.3లో (A)లో ఉన్న వాలు $a_1>0$ అయితే, మనం పైకి ఏటవాలు వక్రరేఖను పొందుతాము. పటం 1.3లో (B) వలె వాలు a_1 ఋణాత్మకంగా ఉంటే, మనం క్రిందికి వాలు వక్రరేఖను పొందుతాము. పై రెండు రేఖాచిత్రాలలో, మొదటి క్వాడ్రంట్‌లో రెండు వక్రతలు కనిపిస్తున్నందున గుణకం విలువలు ధనాత్మకంగా ఉంటాయి. తరువాత పాఠంలో మీరు $Y = MX + C$ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి సరళ రేఖ యొక్క సమీకరణం గురించి అధ్యయనం చేయగలరు. ఇది ప్రస్తుత రేఖీయ సమీకరణం లేదా సరళ రేఖీయ ప్రమేయం వలె ఉంటుంది. Xకి వేర్వేరు విలువలను కేటాయించడం ద్వారా, ప్రమేయం నియమాన్ని వర్తింపజేయడం ద్వారా సంబంధిత Y-విలువలను మనం పొందవచ్చు. ఇది ఒక సాధారణ ఉదాహరణను ఉపయోగించి వివరించబడింది.

పటం 1.3 సరళ రేఖీయ ప్రమేయం



$Y = a_0 + a_1X$, $Y = 4 + 2X$ అనుకుందాం. పట్టికలో చూపిన విధంగా, సమీకరణంలో X విలువలను భర్తీ చేయడం, విలువలను గణించడం, ద్వారా, సమీకరణం ఎడమ వైపులో ఉన్న సంబంధిత Y విలువలను పొందుతాము. ఉదాహరణకు, $X = 3$, $Y = 4 + 2(3) = 4 + 6 = 10$. అదే విధంగా మనం Y యొక్క ఇతర విలువలను గణించవచ్చు. XY ప్లేన్‌లో, ఈ X, Y విలువలను గుర్తించడం ద్వారా, మనం సరళ రేఖను పొందవచ్చు. దిగువ రేఖాచిత్రంలో చూపిన విధంగా సరళ రేఖ వాలు 2, అంతరాయ విలువ ($X = 0$ అయినప్పుడు) 4.

X	1	2	3	4	5	6
Y	6	8	10	12	14	16



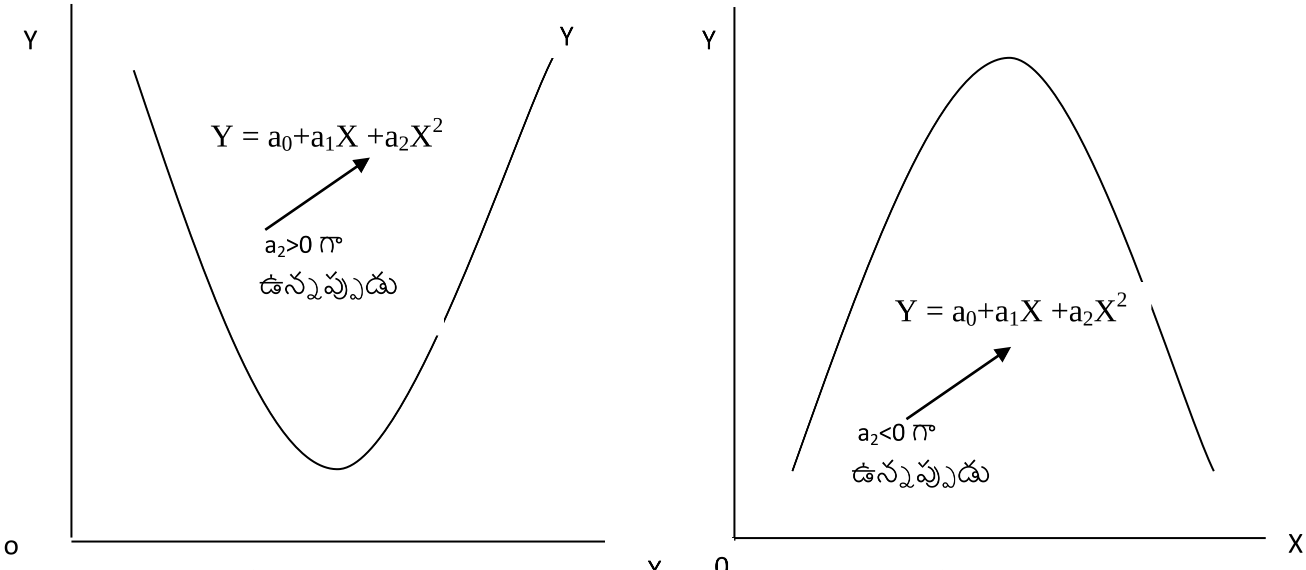
ఆర్థిక అనువర్తనాలు: అర్థశాస్త్రంలో సరళ రేఖ అనేక అనువర్తనాలు ఉన్నాయి. సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో, సరళ డిమాండ్, సప్లై ప్రమేయలు, సంపూర్ణమైన పోటి మార్కెట్లో, ఏక స్వామ్యంలో సగటు, ఉపాంత రాబడి రేఖలు, సరళ రేఖలకు ఉత్తమ ఉదాహరణలు. సరళ వినియోగ ప్రమేయం, సరళ పొదుపు ప్రమేయం, సరళ పెట్టుబడి ప్రమేయం, సగటు ప్రవృతి రేఖ (APC), సగటు పొదుపు రేఖ (APS) స్థూల ఆర్థిక శాస్త్రంలో సరళరేఖలకు ఉత్తమ ఉదాహరణలు.

1.3.1.3 ఘాత ప్రమేయం

$Y=aX^2+bX+c$ లేదా $Y = a_0+a_1X +a_2X^2$ వంటి రెండవ స్థాయి బహుపది ప్రమేయంను 'X'లో ఘాత ప్రమేయం అంటారు. ఘాత ప్రమేయంను సున్నాకి సమం చేస్తే, దానిని వర్గ సమీకరణం అంటారు. ఏదైనా ఇతర ప్రమేయం లాగానే ఒక ఘాత ప్రమేయం ప్రమేయం నియమాన్ని మాత్రమే చెబుతుంది. ఇది ఏకైక శిఖరం లేదా లోయ ఒంపుతో అతిపరవాలయం ఆకారాన్ని తీసుకుంటుంది.

ఘాత ప్రమేయం రేఖ సాధారణ ఆకృతి, భాగం – A, భాగం – Bలో చూపిన విధంగా ఉంటుంది.

పటం 1.4 ఘాత ప్రమేయం



ఉదాహరణ:

$Y = X^2+4X-5$ ఒక ఘాత ప్రమేయం ఉండనివ్వండి. Xకి వేర్వేరు విలువలను ఇచ్చి, ఘాత ప్రమేయంకు వర్తించే విధంగా, ఘాత ప్రమేయ నిర్దిష్ట నియమాన్ని వర్తింపజేయడం ద్వారా Y-విలువలు కింది పట్టికలో తెలిపిన విదంగా పొందబడతాయి.

X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16

ఉదాహరణకు X -5 విలువను తీసుకున్నప్పుడు,

$$Y = X^2+4X-5 = (-5)2+4(-5)-5 = 25-20-5 = 25-25 = 0$$

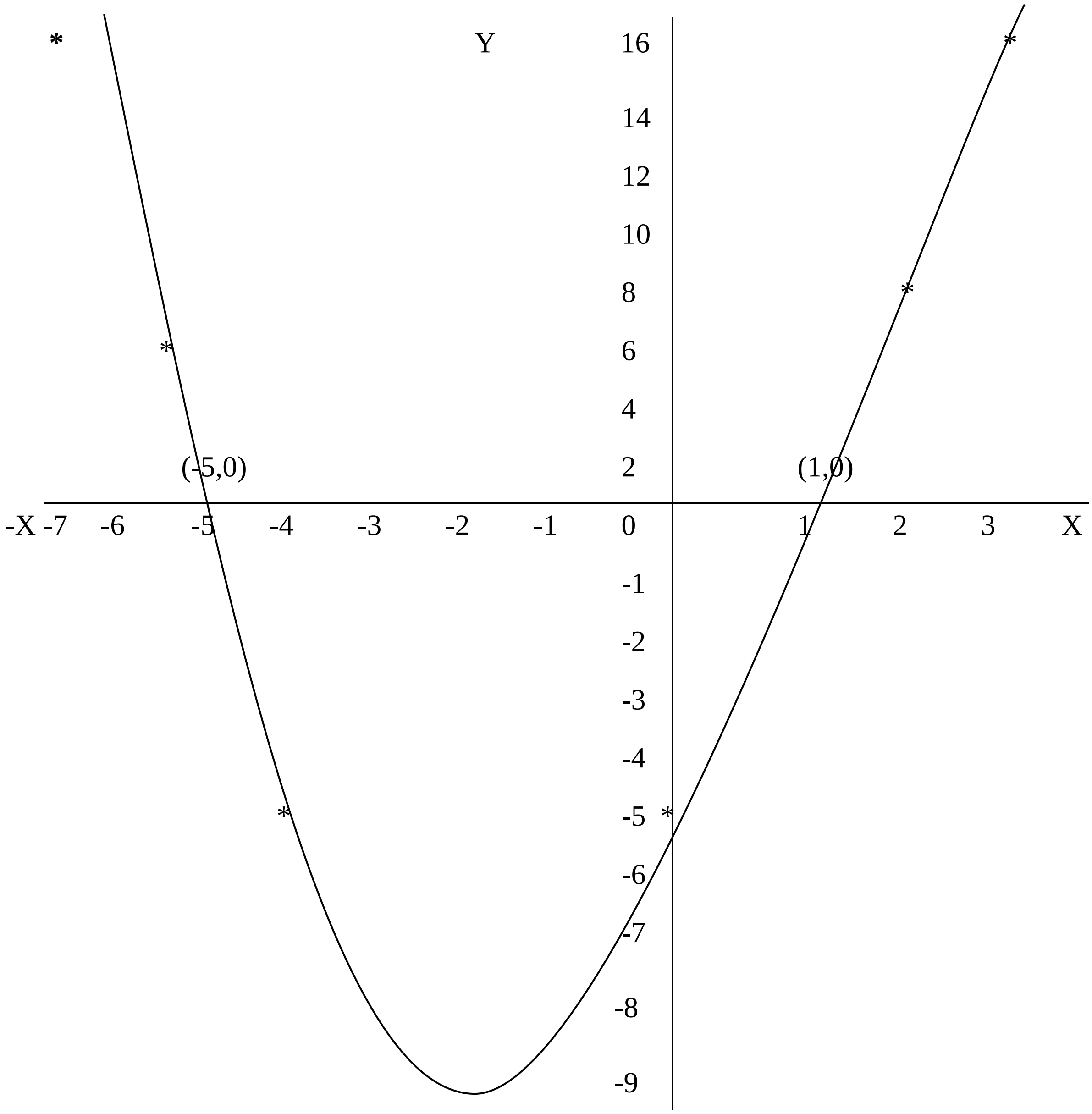
అదేవిధంగా, X, 2ను తీసుకున్నప్పుడు,

$$Y = X^2+4X-5 = (2)2+4(2)-5 = 4 +8 -5 = 12-5 = 7$$

అదే విధంగా, ఇతర విలువలు లెక్కించబడతాయి. ఈ x, y విలువలను, రేఖా చిత్రంలో ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా మనకు పరావలయం ఆకారంతో ఘాత రేఖ లభిస్తుంది.

ఇప్పటికే చెప్పినట్లుగా, ఘాత ప్రమేయం సున్నాకి సమానం అయినప్పుడు, అంటే Y=0 అయినప్పుడు, ఘాత ప్రమేయం ఘాత సమీకరణంగా మారుతుంది. ఘాత సమీకరణానికి పరిష్కారం కనుగొనబడుతుంది. ఘాత సమీకరణానికి పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం అంటే, Y=0 అయినప్పుడు, నిర్దిష్ట X-విలువలను గుర్తించడం. అంటే, చిత్రంలో పరావలయం తిజ సమాంతర అక్షాన్ని ఖండించు బిందువులను గుర్తించడం. Y = f(X) = 0 ప్రమేయంలో, అటువంటి ఖండనలు రెండు చోట్ల ఉన్నాయి. అవి (X,Y) జంట బిందువులు, (1,0), (-5,0). అందువల్ల, పై ఘాత ప్రమేయం పరిష్కార విలువలు -5 లేదా +1.

పటం 1.5 ఉదాహరణతో ఘాత సమీకరణ పరిష్కారం



$Y=aX^2+bX+c = 0$ ఘాత సమీకరణానికి పరిష్కారం కింది సూత్రం ద్వారా కూడా కనుగొనవచ్చు:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

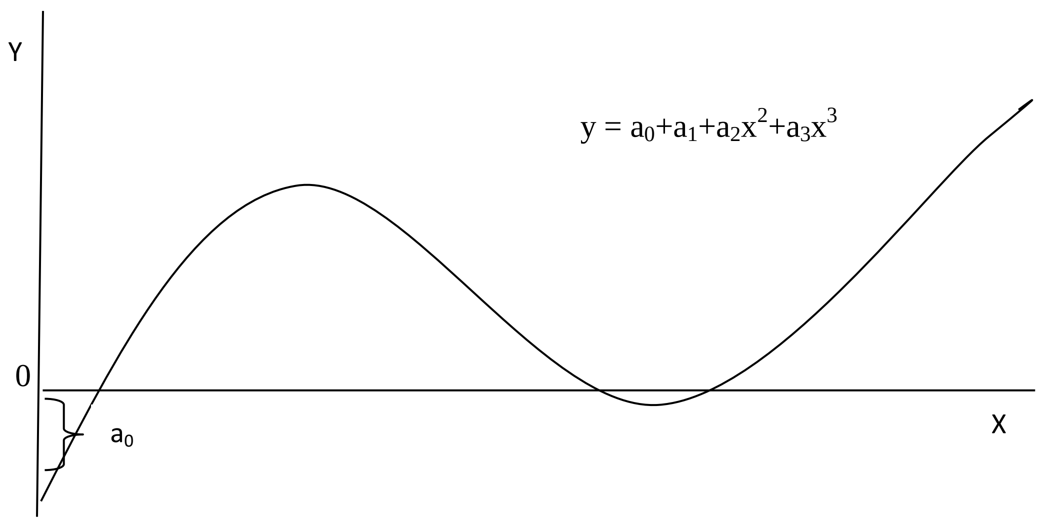
ఆర్థిక అనువర్తనాలు

సాంప్రదాయ వ్యయ సిద్ధాంతంలో U-ఆకారపు సగటు (AC), ఉపాంత (MC) వ్యయ రేఖలు, చర ఉత్పత్తి కారకం మొత్తం ఉత్పత్తి రేఖ, సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లోని కారకం సగటు రాబడి రేఖ, ఘాత ప్రమేయంకు కొన్ని ఇతర ఉదాహరణలు. ఆర్థికశాస్త్రంలో. గరిష్ఠ లాభాలు, లేదా గరిష్ఠ రాబడి లేదా కనిష్ఠ వ్యయం మొదలైనవాటిని తెలుసుకోవడానికి ఘాత ప్రమేయంయొక్క శిఖర, లోయ బిందువులు ఉపయోగించబడతాయి.

1.3.1.4 మూడవ ఘాత ప్రమేయం

$Y = a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ లేదా $y = ax^3+bx^2+cx+d$ మూడవ స్థాయి బహుపది. ఇది మూడవ ఘాత ప్రమేయం యొక్క క్రియాత్మక రూపం. ఇందులో, బహుపది ఘాతం, దాని మూడవ స్థాయికి పెంచబడుతుంది. మూడవ ఘాత ప్రమేయ రేఖ పటం 1.6 ఇవ్వబడింది

పటం 1.6 మూడవ ఘాత ప్రమేయం



మూడవ ఘాత ప్రమేయ పారామితుల (a_0, a_1, a_3), సంకేతాలు, పరిమాణంపై ఆధారపడి, a0, a1, a3 మూడవ ఘాత ప్రమేయ రేఖ ఆకారం ఆధారపడి ఉంటుంది.

మూడవ ఘాత ప్రమేయ ఆర్థిక అనువర్తనాలు

వాణిజ్య చక్రాల వివిధ దశలు, ఆదాయం, ఖర్చులు, పొదుపులు, పెట్టుబడి మొదలైన అనేక ఆర్థిక చలరాసులను సమయ శ్రేణిలోని పోకడలను మూడవ ఘాత ప్రమేయ సహాయంతో సూచించవచ్చు.

1.3.1.5 రేషనల్ ప్రమేయం

ఏదైనా రెండు బహుపది విధులు, ఒకదానికొకటి నిష్పత్తిగా వ్యక్తీకరించబడితే, దానిని రేషనల్ (రేషియో-నల్) ప్రమేయం అంటారు. ఈ నిర్వచనం ప్రకారం ప్రతి బహుపది ప్రమేయం విధిగా రేషనల్ ప్రమేయంగా, ఉంటుంది, ఎందుకంటే స్థిర ప్రమేయం అయిన 1 ద్వారా బహుపదిని విభజించడం కూడా రేషనల్ ప్రమేయం అవుతుంది.

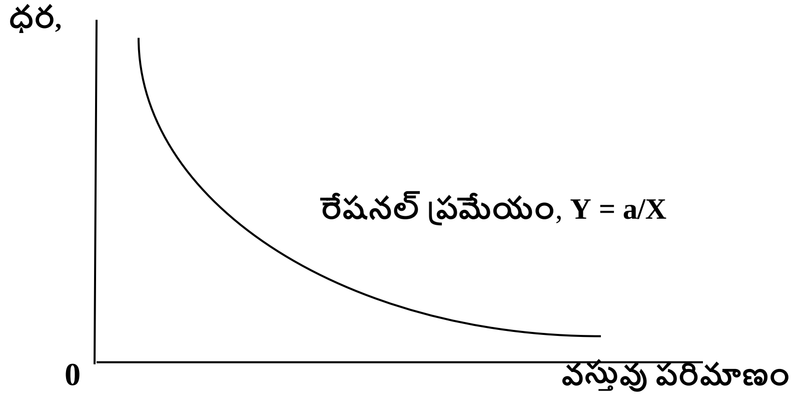
ఉదా. 1. $y = 3/x$.

పై ఉదాహరణలో, రేషనల్ ప్రమేయం, స్థిర ప్రమేయంకు సరళ ప్రమేయం నిష్పత్తిగా వ్యక్తీకరించబడింది.

ఉదా. 2. $y = (x-1)/(x^2+2x+4)$,

పై ఉదాహరణలో, రేషనల్ ప్రమేయం, సరళ ప్రమేయంకు ఘాత ప్రమేయం నిష్పత్తిగా వ్యక్తీకరించబడింది. రేషనల్ ప్రమేయం రేఖా చిత్రం పటం 1.7లో చూపిన విధంగా ఉంటుంది.

పటం 1.7 రేషనల్ ప్రమేయ రేఖా చిత్రం



ఆర్థిక శాస్త్రంలో రేషనల్ ప్రమేయం అనువర్తనాలు

సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో, ఏకత్వ వ్యాకోసత్వం విలువ కలిగిన ప్రతేక డిమాండ్ రేఖ, లంబ అతి పరవలయం రేషనల్ ప్రమేయంకు ఉత్తమ ఉదాహరణ.

సగటు స్థిర వ్యయ వక్రరేఖ: AFC x Q = TFC లేదా Q = a/P లేదా PQ = 'a' అనేది రేషనల్ ప్రమేయంకు మరొక ఉదాహరణ.

1.4 సారాంశం

ఈ పాఠంలో, మనం సంబంధాలు, ప్రమేయం భావనల గురించి తెలుసుకున్నాము. ప్రమేయ భావనను అర్థం చేసుకోవడానికి, 'సమితి', 'కార్టీసియన్ లబ్ధం', 'సంబంధం', అనే భావనలను అర్థం చేసుకోవడం అవసరం కాబట్టి, మనం ఈ భావనల గురించి క్లుప్తంగా తెలుసుకున్నాము. ప్రమేయం అనేది ఒక ప్రత్యేక రకమైన సంబంధం అని మనం చూశాము, దీనిలో ప్రతి X-విలువ లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ X-విలువలకు ఒకే ఒక (ప్రత్యేకమైన) Y-విలువ ఉంటుంది. ఒక ప్రమేయంలో, మ్యాపింగ్ ప్రక్రియ ద్వారా X-విలువలు Y-విలువలుగా రూపాంతరం చెందుతాయి. మ్యాపింగ్ అనే పదం నిర్దిష్ట నియమాన్ని

తెలియజేస్తుంది, దీని ద్వారా x-విలువలు Y-విలువలుగా రూపాంతరం చెందుతాయి. మ్యాపింగ్ నియమంపై ఆధారపడి, అనేక రకాల ప్రమేయాలు ఉన్నాయి. ప్రమేయాలను స్థూలంగా బీజగణితం, బీజగణితం కాని విధులుగా విభజించవచ్చు. బీజగణిత విధులు బహుపది ప్రమేయం, రేషనల్ ప్రమేయం అనే రెండు రకాలుగా ఉంటాయి. ఆర్థిక శాస్త్రానికి వర్తించే విధంగా నాలుగు ప్రధాన రకాల బహుపది ప్రమేయాలు ఉన్నాయి. అవి స్థిర ప్రమేయం, సరళ ప్రమేయం, ఘాత ప్రమేయం, మూడవ ఘాత ప్రమేయం. ఈ పాఠంలో మనం ఈ నాలుగు రకాల బహుపది ప్రమేయాల క్రియాత్మక రూపాలు లేదా సమీకరణాలను వాటి గ్రాఫికల్ ప్రాతినిధ్యం, ఆర్థిక అనువర్తనాలతో పాటు చూశాము. ఈ ప్రమేయాలే కాకుండా, ఆర్థిక శాస్త్రంలో విస్తృతంగా ఉపయోగించే ఒక ప్రత్యేక రకం ప్రమేయం గురించి కూడా మనం ప్రస్తావించాము, అది రేషనల్ ప్రమేయం. దాని క్రియాత్మక రూపం, జ్యామితీయ ప్రాతినిధ్యం, ఆర్థిక అనువర్తనాలు గూర్చి విపులంగా తెలుసుకున్నాం.

1.5 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. కింది ప్రశ్నలకు ఒక్కొక్కటి 10 పంక్తులలో సమాధానాలు రాయండి.

1. సమితిని నిర్వచించండి. సమితి కోసం ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

2. కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితి అంటే ఏమిటి? మీరు దానిని ఎలా పొందగలరు?

3. సంబంధం అంటే ఏమిటి? రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

4. ప్రమేయంను నిర్వచించండి. దానిని సంబంధం నుండి వేరు చేయండి.

II. కింది ప్రశ్నలకు ఒక్కొక్కటి 30 పంక్తులలో సమాధానాలు రాయండి.

1. ప్రమేయంను నిర్వచించండి. ఉదాహరణలతో వివిధ రకాల ప్రమేయాలను చర్చించండి.

2. బహుపది ప్రమేయం అంటే ఏమిటి? వివిధ రకాల బహుపది ప్రమేయాలను క్రియాత్మక రూపాలు, జ్యామితీయ ప్రాతినిధ్యం, ఆర్థిక అనువర్తనాలతో చర్చించండి.

3. ఘాత ప్రమేయం అంటే ఏమిటి? దాని యాత్మక రూపాలు, జ్యామితీయ ప్రాతినిధ్యం, ఆర్థిక అనువర్తనాలతో చర్చించండి.

4. ఘాత ప్రమేయం భావనను వివరించండి. , జ్యామితీ, సూత్రం ద్వారా $Y = X^2+4X-5$ త ప్రమేయంకు పరిష్కారాన్ని కనుగొనండి.

1.6 పదకోశం

1. **సమితి:** బాగా నిర్వచించబడిన, బాగా గుర్తించబడిన మూలకాల సేకరణ

2. . **కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితి:** మొదటి సమితి నుంచి మొదటి మూలకం, రెండవ సమితి నుంచి రెండవ మూలకం తీసుకోవడం ద్వారా ఏర్పడిన క్రమబద్ధం చేయబడిన జంటల సమితి.

3. **సంబంధం:** ఇచ్చిన షరతును సంతృప్తిపరిచే కార్టేసియన్ లబ్ధ సమితి యొక్క ఉప-సమితి.

4. **ప్రమేయం**: ప్రతి X-విలువకు లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ X-విలువలకు ఒక ప్రత్యేక Y-విలువ మాత్రమే ఉండే ప్రత్యేక రకం సంబంధం.

1.7 సూచించబడిన పుస్తకాలు

1. Alpha Chiang : ***Fundamental Methods of Mathematical Economics***

2. R. G. D. Allen: ***Mathematical Analysis for Economists***

3. Mehta and Medhani: **Mathematics for Economists**

*****

భాగం - 1

పాఠము - 2

ప్రమేయాల అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత

పాఠం రూపురేఖలు

2.0 పాఠం ఆశించిన ఫలితాలు

ఈ పాఠాన్ని విజయవంతంగా నేర్చుకున్న తర్వాత, మీరు

i) అవధి భావన గూర్చి అర్థం చేసుకోగలరు;

ii) అవధి యొక్క ఆచరణాత్మక ఉదాహరణలను గ్రహించ గలరు;

iii) అవధి సిద్ధాంతాలను విశ్లేషించ గలరు;

iv) అవధిపై సాధారణ సమస్యలను అంచనా వేయడానికి అవధి సిద్ధాంతాలను వర్తింపజేయ గలరు;

v) ఆచరణాత్మక పరిస్థితులకు ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నత భావన అనువర్తనాన్ని ప్రదర్శించ గలరు;

2.1 పరిచయం:

గడచిన పాఠంలో, మనం కార్టీసియన్ లబ్ధం నుంచి ఉత్పన్నమైన ప్రమేయం భావన గురించి చర్చించాము. ప్రమేయం స్వతంత్ర చలరాసులు, ఆధారిత చలరాసులు మధ్య సంబంధాన్ని వ్యక్తపరుస్తుంది. ప్రమేయ నియమాన్ని బట్టి, ప్రమేయ రేఖా చిత్రం, సరళ రేఖ, పరావలయం లేదా ఘాత రేఖ మొదలైన వివిధ ఆకృతులను తీసుకుంటుందని కూడా మనం చూశాము. ఈ పాఠలో, ప్రమేయాల అవధి, అవిచ్ఛిన్నత వంటి కొత్త భావనలను మనం నేర్చుకుంటాము. ఈ భావనలు ప్రమేయ "అవకలనం" అని పిలువబడే ఒక అత్యంత ముఖ్యమైన భావనను అర్థం చేసుకోవడానికి మనకు సహాయపడతాయి.

1.2 దృష్టాంతాలతో అవధి భావన:

సరళంగా చెప్పాలంటే, స్వతంత్ర చలరాశి, ఇవ్వబడిన విలువకు చేరుకున్నప్పుడు, ఆధారిత చలరాశి (ప్రమేయం) విలువ యొక్క అంతిమ లేదా చివరి బిందువును "ప్రమేయ అవధి" అంటారు. గణితం అధ్యయనం చేయని విద్యార్థికి, ప్రమేయం అవధి నిర్వచనం అర్థం చేసుకోవడం చాలా కష్టం. కాబట్టి, మనం (ప్రమేయ అవధికి నిర్వచనాన్ని ఇచ్చే ముందు, కొన్ని ఆచరణాత్మక ఉదాహరణల ద్వారా అవధిని అర్థం చేసుకుందాం. తద్వారా అవధికి నిర్వచనం ఇచ్చినప్పుడు మీరు అవధి భావన గురించి బాగా అర్థం చేసుకుంటారు.

ఉదాహరణ – 1: $y = 1 - \frac{1}{x}$ అని అనుకుందాం.

పై ప్రమేయంలో x కు కొన్ని ఊహాజనిత విలువలను ప్రత్యామ్నాయం చేద్దాం. దద్వారా ఆధారిత చలరాశి (y) (ప్రమేయం) విలువలను మూల్యాంకనం చేద్దాం.

పట్టిక – 2.1

X	1	2	3	4	5	6	- - -	∞
Y	0	0.5	0.66	0.75	0.80	0.83	→	1

పట్టిక – 2.2

X	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	- - -	-∞
Y	2	1.5	1.33	1.25	1.20	1.17	1.14	→	1

మొదటి పట్టికలో గమనించగలిగినట్లుగా, పూర్ణాంకాల విలువల ద్వారా x-వరుసక్రమం, 1 నుంచి నిరవధికంగా పెరుగుతుండగా, y-వరుసక్రమం కూడా సున్నా నుంచి పెరిగి అవధి (L) '1'కి చేరుకుంటుంది. x అనంతం (∞)కి మొగ్గు చూపడం ద్వారా, ప్రమేయం, $y = 1-\frac{1}{x}$, 1కి మొగ్గు చూపుతుందని, x, y శ్రేణుల మధ్య ఉండు అనురూప ఆలోచనను, వ్యక్తీకరించబడింది. చిహ్నాలలో మనం దీనిని ఇలా రాస్తాము.

$$\underset{x \to \infty}{\text{Lt.}} \left(y = 1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

రెండవ పట్టికలో, పూర్ణాంకాల విలువల ద్వారా x క్రమం నిరవధికంగా తగ్గుతుంది. కాబట్టి, y క్రమం 2 నుంచి తగ్గి అవధి (L) '1'కి చేరుకుంటుంది. x వరుసక్రమం, రుణాత్మక అనంతం (-∞)కి మొగ్గు చూపడం ద్వారా, ప్రమేయం, $y = 1-\frac{1}{x}$, 1కి మొగ్గు చూపుతుందని, x, y శ్రేణుల మధ్య ఉండు అనురూప ఆలోచనను, వ్యక్తీకరించబడింది. చిహ్నాలలో మనం దీనిని ఇలా రాస్తాము.

$$\underset{x \to -\infty}{\text{Lt.}} \left(y = 1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

x, 1,2,3.... నుంచి N కి మొగ్గు చూపితే, y-ప్రమేయం పరిమిత సంఖ్య Lకి చేరుకుంటే, అప్పుడు మనం Lని, y యొక్క ఎడమ వైపు అవధిగా పిలుస్తాము. చిహ్నాలలో, మనం దీనిని ఇలా రాస్తాము.

$$\underset{x \to N-.}{\text{Lt.}} \left(y = 1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

X-విలువలు, N కంటే తక్కువ విలువ నుంచి Nని చేరుకుంటాయని N-సూచిస్తుంది. మరోవైపు, X-విలువలు, N కంటే ఎక్కువ విలువల నుంచి Nని చేరుకున్నప్పుడు, y, అవధి Lని పొందితే, మనం Lని, y యొక్క కుడి వైపు అవధిగా పిలుస్తాము. చిహ్నాలలో, మనం దానిని ఇలా రాస్తాము.

$$\underset{x \to N+}{Lt.} \left(y = 1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

x-విలువలు N కంటే ఎక్కువ విలువ నుంచి N చేరుకుంటాయని N+ సూచిస్తుంది. రెండు పరిమితులు, L అనే ఉమ్మడి విలువను కలిగి ఉన్నప్పుడు మాత్రమే, మనం దానిని ఇలా రాస్తాము.

$$\underset{x \to N}{Lt.} \left(y = 1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

పై ఉదాహరణలలో, రెండు శ్రేణులు 1 అనే ఉమ్మడి అవధి విలువను కలిగి ఉన్నాయని గమనించండి,

ఉదాహరణ 2: $y = x^2+3x-2$గా ప్రమేయం అని అనుకుందాం.

మనం xలో ఊహాత్మక విలువలను ప్రత్యామ్నాయం చేద్దాం. దిగువ పొందిన విధంగా సంబంధిత y విలువలను గణిద్దాం:

పట్టిక – 2.3

X	1	2	3	4	5	6	…	∞
Y	2	8	16	26	38	52	….	∞

పట్టిక – 2.4

X	-1	-2	-3	-4	-5	-6
Y	-4	-4	-2	2	8	16

పట్టికలలో గమనించగలిగినట్లుగా, పట్టిక-2.3 విషయంలో, x అనంతం వైపు మొగ్గు చూపుతుంది కాబట్టి, సంబంధిత y విలువల శ్రేణులు అనంతం వైపు మొగ్గు చూపుతాయి. అదేవిధంగా, పట్టిక-2.4లో చూడగలిగినట్లుగా, xకి ఋణాత్మక అనంతం వైపు తగ్గుదల ఉండే విలువల క్రమాన్ని ఇచ్చినప్పుడు, సంబంధిత y-విలువలు కూడా అనంతం వైపు మొగ్గు చూపుతాయి. కాబట్టి, x అనంతం లేదా ఋణాత్మక అనంతం వైపు మొగ్గు చూపినప్పుడు, ప్రమేయం, $y = x^2+3x-2$ అనంతం వైపు మొగ్గు చూపుతుంది,. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, రెండు సందర్భాలలో y క్రమం ఏ పరిమిత సంఖ్యL-ను చేరుకోదు. కాబట్టి, ప్రమేయం, $y = x^2+3x-2$కి L-అవధి లేదని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 3: $y = \frac{3}{x^2}$ ప్రమే యమని అనుకుందాం. మనం xలో ఊహాత్మక విలువలను ప్రత్యామ్నాయం చేసి, దిగువ పొందిన విధంగా సంబంధిత y విలువలను గణిద్దాం**:**

పట్టిక – 2.5

X	1	2	3	4	5	--	∞
Y	3	1.5	1	0.75	0.60	--	0

పట్టిక – 2.6

X	1	½	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	--	0
Y	3	6	9	12	15	18	21	--	∞

పట్టిక – 2.5 లో, x విలువలు ఒకటి నుంచి అనంతానికి పెరిగినప్పుడు, సంబంధిత y విలువలు 3 నుంచి క్రమంగా తగ్గి సున్నాకి చేరుకుంటాయి. అదేవిధంగా, పట్టిక – 2.6లో, x విలువలు 1 నుంచి సున్నాకి తగ్గి సంబంధిత y-విలువలు అనంతానికి చేరుకుంటాయి.

$$\underset{x \to \infty}{\text{Lt.}} \left(y = \frac{3}{x}\right) = 0. \qquad \underset{x \to 0}{\text{Lt.}} \left(y = \frac{3}{x}\right) = \infty.$$

అనంతం అనేది ఒక సంఖ్య కాదని, దానిని మనం లెక్కించలేమని గమనించాలి. ఒక వరుస క్రమము అవధిని గణించడానికి, ఇతర గణిత అనువర్తనాలకు దానిని వర్తింపజేయడానికి, అంత పరిమాణంలో (in Finite quantity) అవధి యొక్క ఆలోచనను వ్యక్తపరచడం అనివార్యం. ఉదాహరణకు, $y = \frac{1}{x} + 1$, ప్రమేయం లో, $x \to \infty$గా, ప్రమేయ అవధి 1. ఈ ప్రమేయ అవధి ప్రక్రియలో 1 తరువాత తదుపరి సంఖ్య 2, రెండు తరువాత తదుపరి సంఖ్య 3 మొదలైనవి. మనం పూర్ణాంకాలతో (Integers) వ్యవహరిస్తున్నట్లయితే, తదుపరి సంఖ్య ఏమిటో మనకు తెలుసు. కానీ మనం వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థతో (Real Number System) వ్యవహరిస్తుంటే, తదుపరి సంఖ్య ఏమిటో మనకు వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థలో తెలియదు. ఎందుకంటే దశాంశ బిందువు లేదా భిన్నంతో సహా, సాధ్యమయ్యే అన్ని విలువలను తీసుకునే వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థలో, మనకు ఏది తదుపరి సంఖ్య అని తెలియదు. దీనికి కారణం వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ దట్టమైనది, లెక్కించలేనిది కూడా. ఈ సమస్యను అధిగమించడానికి, సమస్యను 18వ శతాబ్దానికి చెందిన గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఈ కదిలే ప్రక్రియను కాంతి చిత్రం తీశారు, స్థిర చిత్రాన్ని పొందారు. వారు పరిమిత పరిమాణాల పరంగా కదిలే ప్రక్రియ యొక్క ఈ స్థిర చిత్రాన్ని విశ్లేషించారు.

2.3 అవధి అధికారిక నిర్వచనం:

$x = x_1$ బిందువు వద్ద తప్ప, ఎంత చిన్నదైనా సరే, ఇవ్వబడిన ప్రతి $\varepsilon>0$కి, 'x' విలువ x_1కి చేరువైనప్పుడు, $|f(x) - L| < \varepsilon$ అసమానతని సంతృప్తి పరచే విదంగా $|x-x_1|< \delta$ విరామంలో x యొక్క అన్ని విలువలకు εపై ఆధారపడిన ధనాత్మక δని మనం కనుకోవచ్చు, f(x) ప్రమేయంకు అవధి ఉంటుంది.

2.4 నిర్వచన ఉదహరింపు

ఒక రాకెట్, f(x) చంద్రుడు, (L) ను సమీపిస్తోందని అనుకుందాం. రాకెట్, f(x) చంద్రుడిపై, (L) సాయంత్రం 6.00 గంటలకు (x_1) చేరుకోగలదని మనం అనుకుందాం. అప్పుడు $|x-x_1| = \delta$ తేడాను రాకెట్ f(x) చంద్రుని (L) పై దిగడానికి ఇంకా మిగిలిఉన్న సమయం గా భావించవచ్చు .

చంద్రుని (L)నుంచి ε = 10,000 మైళ్ల దూరంలో ఉన్న రాకెట్ చిత్రాన్ని మనం తీయాలని అనుకుందాం, $|f(x) - L|$ రాకెట్ మరియు చంద్రుని మధ్య ఉన్న దూరాన్ని సూచిస్తుంది. అప్పుడు ఇది $|f(x) - L|$ = 10,000 మైళ్లు = ε.

సాయంత్రం 6.00 గంటలకు (x_1) ఎన్ని నిమిషాల ముందు చిత్రాన్ని తీయాలి? ఇది 5 నిమిషాలు అనుకుంటే, అప్పుడు సమయం తేడా $|x-x_1| = \delta = 5$ నిమిషాలు.

దూరం ఇంకా తక్కువగా, ε = 10 మైళ్ల వద్ద ఉంటే, అప్పుడు δ = 2 సెకండులు. దూరం తక్కువగా ε = 1 మైలు అయితే, అప్పుడు సమయం, δ = 0.4, సెకండులు ఉంటుంది. చంద్రునికి ఎంత దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు చిత్రం తీస్తే, చిత్రం అంత స్పష్టంగా ఉంటుంది అని గ్రహించాలి.

ఇది కదిలే ప్రక్రియ అయినప్పటికీ, మనం ఫోటో తీయాలనుకుంటున్నాము కాబట్టి, ఈ విధంగా సమయం (δ), దూరం (ε)ద్వారా నిర్ణయించబడీ, రాకెట్ (f(x), చంద్రుని (L) మధ్య δ సమయంలో ε దూరంలో స్థిర చిత్రంగా (static picture) ముగుస్తుంది.

2.5 అవధి సిద్ధాంతాలు:

పరిమితులపై అనేక సిద్ధాంతాలు ఉన్నాయి. మనం ప్రమేయ అవధిని మూల్యాంకనం చేసినప్పుడు, కొన్ని బాగా స్థిరపడిన లేదా బాగా నిరూపించబడిన అవధి సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించవచ్చు. ఈ సిద్ధాంతాలు, అనేక సంక్లిష్టమైన అవధిల మూల్యాంకన పనిని వాస్తవానికి సులభతరం చేయగలవు.

2.5.1 ఒకే ప్రమేయం తో కూడిన సిద్ధాంతాలు:

మనకు ఒకే ప్రమేయం ఉన్నప్పుడు, y = f(x), కింది అవధి సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించవచ్చు.

2.5.1.1 సిద్ధాంతం-I:

y = ax+b, అయితే,

$$\lim_{x \to N} y = aN + b$$

ఉదాహరణ: y = 5x+7 అని అనుకుందాం.

ఇప్పుడు $\lim_{x \to 2} y = aN + b \quad = 5(2) + 7 = 10+7 = 17$

2.5.1.2 సిద్ధాంతం-II:

$y = f(x) = b$, అయితే,

$$\lim_{x \to N} y = b$$

ఈ సిద్ధాంతం ప్రకారం స్థిర ప్రమేయ, అవధి ఆ ప్రమేయం స్థిరాంకం. ఈ సిద్ధాంతం, $a = 0$ అయినప్పుడు, మొదటి సిద్ధాంతం ప్రత్యేక సందర్భమని గుర్తించాలి.

ఉదాహరణ: $y = 7$ అని అనుకుందాం.

$$\text{కాబట్టి } y = 7 \quad (x \to 0)$$

2.5.1.3 సిద్ధాంతం -III:

$y = f(x) = y = x$, అయితే,,

$$\lim_{x \to N} y = N$$

ఉదాహరణ: $y = f(x) = y = x^3$, అయితే,

$$\lim_{x \to 2} y = 2^3 = 8$$

$y = f(x) = y = x^k$, అయితే,

$$\lim_{x \to N} y = N^k$$

2.5.2 ఒకటి కంటే ఎక్కువ ప్రమేయాలను కలిగి ఉన్న సిద్ధాంతాలు

x అను ఒకే స్వతంత్ర చలరాశికి సంబంధించిన, $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ అను రెండు ప్రమేయాలు $x \to N$ చేరుకున్నప్పుడు L_1, L_2 అవధిలను కలిగి ఉంటే, కింది సిద్ధాంతాలు వర్తిస్తాయి

2.5.2.1 సిద్ధాంతం IV - సంకలనం-వ్యవకలనం అవధి సిద్ధాంతం:

రెండు ప్రమేయాల మొత్తం లేదా భేదం అవధి, వాటి సంబంధిత అవధిల మొత్తం లేదా వ్యత్యాసం అని ఈ సిద్ధాంతం పేర్కొంది. అంటే

$$\lim_{x \to N} (y_1 + y_2) = L_1 + L_2$$

$\lim_{x \to N} 2y_1 = \lim_{x \to N} (y_1 + y_1) = L_1 + L_2 = 2L_1$ అని ముఖ్యంగా గమనించాలి

2.5.2.2 సిద్ధాంతం V – అవధి లబ్ధ సిద్ధాంతం:

రెండు ప్రమేయాల లబ్ధ అవధి, వాటి సంబంధిత వేక్తికత అవధులు లబ్ధం అని అవధిల లబ్ధ సిద్ధాంతం పేర్కొంది. అంటే,

$$\underset{x \to N}{\text{Lt.}} (y_1, y_2) = L_1 . L_2$$

ఇది ఇవ్వబడిన ప్రమేయ వర్గానికి దీన్ని వర్తింపజేయగా

$$\underset{x \to N}{\text{Lt.}}(y_1, y_1) = \underset{x \to N}{\text{Lt.}}(y_1)^2 = L_1 L_1 = L_1^2$$ అవుతుంది.

2.5.2.3 సిద్ధాంతం VI – విభక్త అవధి సిద్ధాంతం:

రెండు ప్రమేయాల విభక్త అవధి, వాటి సంబంధిత వేక్తికత అవధుల విభక్తకు సమానం. సహజంగానే, L_2 అవధి సున్నా కానిదిగా పరిమితం చేయబడింది. లేకపోతే, గుణకం నిర్వచించబడలేదు.

$$\underset{x \to N}{\text{Lt.}} \left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{L_1}{L_2} = L_2 \neq 0$$

2.5.2.4 సిద్ధాంతం VII – బహుపది అవధి:

బహుపది అనేది ఒకే స్వతంత్ర చరరాశిని కలిగి ఉండే ప్రమేయమని మనకు తెలుసు, ఘాతం న స్థాయికి పెంచబడింది. కిందివి సాధారణ బహుపది ప్రమేయం.:

$$Y = a_0 + a_1x_1+a_2x_2^2+a_3x_3^3+a_4x_4^4+ \quad +a_nx_n^n$$

ఈ బహుపది అవధి

$$\text{Lt.}[f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm........]$$

2.6 అవధి సిద్ధాంతాల ఆచరణాత్మక ఉదాహరణలు:

అవధిలపై కొన్ని సాధారణ సంఖ్యా ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం. ఈ ఉదాహరణలలో, కొన్నింటిని నేరుగా పరిష్కరించవచ్చు, మరికొన్నింటికి అవధి సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించడం అవసరం.

2.6.1 ఉదాహరణ - 1.

$y = \dfrac{1+x}{2+x}$ ప్రమేయం $x \to 0$ కుచేరుకున్నప్పుడు అవధిని కనుగొనండి.

పరిష్కారం: x స్థానంలో 0 విలువను భర్తీ చేసి, ఆపై సరళీకృతం చేస్తే, మనకు లభిస్తుంది

$$\text{Lt. } \frac{1+x}{2+x} x \to 0 = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

2.6.2 ఉదాహరణ - 2.

$y = \frac{1-x^2}{1-x}$ ప్రమేయం x → 1 కుచేరుకున్నప్పుడు అవధిని కనుగొనండి.

పరిష్కారం: పై సమీకరణంలో x స్థానంలో 1 విలువను నేరుగా భర్తీ చేయడం ద్వారా, మనం సున్నాతో భాగించే సమస్యతో ఎదురౌతుంది.

$$\text{Lt. } \frac{1-x^2}{1-x} \ x \rightarrow 1 \text{ కుచేరుకున్నప్పుడు } = \frac{0}{0}$$

కాబట్టి, మనం x = 1ని అనుమతించలేము. ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని హారంలో x కనిపించని విధంగా మార్చడం ఇక్కడ తగిన విధానం. కాబట్టి, x→ 1 x ≠ 0 అని సూచిస్తుంది. అందువల్ల పదం (1-x) సున్నా కాదు, ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని మార్చిన తర్వాత విభజించడం కింది విధంగా చట్టబద్ధం సరైన విధానం.

$$\text{Lt. } \frac{1-x^2}{1-1} \ x \rightarrow 1 = \text{Lt. } \frac{1-1^2}{1-1} \ x \rightarrow 1 = \text{Lt. } \frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)} = \text{Lt.}(1+x) = 1+1 = 2.$$

x→ 1

2.6.3 ఉదాహరణ – 3. $y = \frac{2x+5}{x+1}$ ప్రమేయం x → ∞ కుచేరుకున్నప్పుడు అవధిని కనుగొనండి.

పరిష్కారం: x చలరాశి లవం, హారం రెండింటిలోనూ కనిపిస్తుంది. మనం లవం, హారం రెండింటిలోనూ ∞ని అనుమతిస్తే, ఫలితం రెండు అనంతమైన పెద్ద సంఖ్యల మధ్య నిష్పత్తి అవుతుంది. ఇది స్పష్టమైన అర్థాన్ని తెలియజేయదు. కాబట్టి, ముందుగా లవంను, హారంతో భాగించండి, తద్వారా x లవంలో కనిపించదు.

2x+5ని x+1తో భాగిస్తే మనకు కింది ఫలితం లభిస్తుంది.

x+1)2x+5(2
2x+2, రెండు నిబంధనలకు సంకేతాలను మార్చడం ద్వారా మనకు లభిస్తుంది
(-) (-)

3

కాబట్టి, $y = 2 + \frac{3}{x+1}$

ఇప్పుడు ప్రమేయంకు అవధిని వర్తింపజేస్తే,

$$\text{Lt.}(y) = \text{Lt.}(2) + \frac{Lt.(3)}{Lt.(x)+Lt.(1)} = 2 + \frac{3}{Lt.(\infty)+.1}$$

as x→∞ as x→∞ as x→∞ as x→∞

2+ (3/∞) = 2+ 0 = 2 మనం పొందుతాము

కాబట్టి ఈ ప్రమేయంకు అవధి 2.

2.6.4 ఉదాహరణ – 4. x విలువ 2కు మొగ్గుచూపునప్పుడు, **y =** $\frac{x^2-4}{x-2}$ ప్రమేయం అవధిని కనుగొనుము.

పరిష్కారం: ఇది ఒక సాధారణ సమస్య. దీన్ని లవం కారకాన్ని ఉపయోగించి లేదా $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి పరిష్కరించగలం. లవంను ఇలా రాయవచ్చు

$$\mathbf{y} = \frac{x^2-2^2}{x-2}$$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఇలా రాయవచ్చు.

$$\mathbf{y} = \frac{(x\ \ +2)(x-2)}{(x-2)}$$

లవం, హారం రెండింటిలోనూ (x-2)ని రద్దు చేస్తే, మనకు లవంలో (x+2) వస్తుంది. పై పదానికి అవధిని x→2గా వర్తింపజేస్తే,

$$\underset{x\to 2}{\mathrm{Lt.}}(x+2) = \underset{x\to 2}{\mathrm{Lt.}}(x) + \underset{x\to 2}{\mathrm{Lt.}}(2) = 2 + 2 = 4$$ మనకు లభిస్తుంది,

2.6.5 ఉదాహరణ – 5. x విలువ ∞కు మొగ్గుచూపునప్పుడు, **y =** $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ప్రమేయం అవధిని కనుగొనుము.

పరిష్కారం: సమస్యకు అవధి నియమాన్ని నేరుగా వర్తింపజేయడం, రెండు పెద్ద సంఖ్యల (∞) మధ్య విభజనను సూచిస్తుంది, ఇది అర్థవంతమైన ఫలితాన్ని ఇవ్వదు. లవం, లేదా హారంలో x కనిపించకుండా కొన్ని గణిత కిటుకులు చేయాల్సి ఉంటుంది. ప్రమేయం లోని అన్ని పదిలను (terms) x^2తో భాగిస్తే,

$$y = \frac{x^2/x^2+1/x^2}{x^2/x^2-1/x^2}$$

$$y = \frac{1+1/x^2}{1-1/x^2}$$ మనకు లభిస్తుంది,

x, అనంతం వైపు మొగ్గు చూసేనేబద్యంలో, లవం, హారంలోని అన్ని పదిలకు అవధిని వర్తింపజేయడం వల్ల, $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt.}}(y) = \frac{Lt.(1)+Lt.(1/x^2)}{Lt.(1)-Lt.(1/x^2)} = \underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt.}}(y) = \frac{1+0}{1-0}$

ఎందుకంటే x అనంతంగా ఉంటుంది కాబట్టి $1/x^2$ అవధి సున్నాకి సమానం.

2.6.6 ఉదాహరణ – 6. x విలువ 3కు మొగ్గుచూపునప్పుడు, **y =** $\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ ప్రమేయం అవధిని కనుగొనుము.

పరిష్కారం: లవంలోని పదిలను కారకం చేసి, ఆపై x విలువ 3 కు మొగ్గుచూపునప్పుడు, లవం, హారంలోని అన్ని పదిలకు అవధిని వర్తింపజేయడం ద్వార ఈ సమస్యని పరిష్కరించగలము.

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3x + 6}{x - 3}$$

$$y = \frac{x(x-2) - 3(x-2)}{x - 3}$$

$$y = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)}$$

లవం, హారం రెండింటిలోనూ (x-3)ని రద్దు చేస్తే, మనకు (x-2) మాత్రమే లభిస్తుంది. విలువ 3కు మొగ్గుచూపునప్పుడు, (x-2) కు అవధిని వర్తింపజేస్తున్నాం. అంటే x స్థానంలో 3ని ప్రత్యామ్నాయం చేయగా,

$$\lim_{x\to 3} y = \lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1.$$

2.6.7 ఉదాహరణ – 7. x విలువ 3కు సమీపంలో ఉన్నప్పుడు, $y = \frac{4x^2 - 17x + 15}{x^2 - x - 6}$ ప్రమేయ అవధిని కనుగొనుము.

పరిష్కారం: లవం, హారం రెండింటిలోని పదిలను కారకం చేసి, ఆపై లవం హారంలోని అన్ని పదిలకు అవధిని వర్తింపజేయడం వల్ల,

$$y = \frac{4x^2 - 17x + 15}{x^2 - x - 6} = \frac{4x^2 - 12x - 5x + 15}{x^2 - 3x + 2x - 6}$$

లవంలోని మొదటి రెండు పదాలలో 4x, తదుపరి రెండు పదాలలో -5 ఉమ్మడి పదిగా తీసుకోండి. అదేవిధంగా హారంలోని మొదటి రెండు పదాలలో x, తదుపరి రెండు పదాలలో 2 ఉమ్మడి పదిగా తీసుకోండి.

$$y = \frac{4x(x-3) - 5(x-3)}{x(x-3) + 2(x-3)}$$

$$y = \frac{(4x-5)(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

లవం, హారం రెండింటిలోనూ (x-3)ని రద్దు చేస్తే, మనకు $y = \frac{(4x-5)}{(x+2)}$ లభిస్తుంది.

x విలువ 3కు సమీపంలో ఉన్నప్పుడు, $y = \frac{(4x-5)}{(x+2)}$ ప్రమేయ, లవం, హారంలోని అన్ని పదిలకు అవధిని వర్తింపజేయడం వల్ల,

.

$$\lim_{x\to 3} y = \frac{\lim_{x\to 3}(4x-5)}{\lim_{x\to 3}(x+2)}$$

$$\underset{x\to 3}{\mathbf{Lt.y}} = \underset{x\to 3}{} \frac{(4(3)-5)}{(3+2)}$$

$$\mathbf{Lt.y} = \left(\frac{(12-5)}{(5)}\right) = \mathbf{7/5.}$$

2.6.8 ఉదాహరణ – 8: x →2, గా ఉన్నప్పుడు, $y = 4x^2+3x-10$ ప్రమేయ అవధిని కనుగొనండి.

పరిష్కారం: x విలువ 2కి మొగ్గు చూపుతున్నందున, నేరుగా ప్రమేయ పదిలకు అవధిని వర్తింపజేయండి.

$$\underset{x\to 2}{Lt.}(y) = \underset{x\to 2}{Lt.}(4x^2+3x-10)$$

$$= \underset{x\to 2}{Lt.}4(x^2) + \underset{x\to 2}{Lt.}3(x) - \underset{x\to 2}{Lt.}(10)$$

$$= 4(2^2) + 3(2)-10$$

$$= 4(4) + 3(2)-10$$

$$= 16 + 6-10 = 22-10 = 12.$$

2.6.9 ఉదాహరణ – 9. x →1, గా ఉన్నప్పుడు, $y =[(2x^2+4x+1)(x-4)]$ ప్రమేయ అవధిని కనుగొనండి.

పరిష్కారం: x →1, గా ఉన్నప్పుడు, $y =[(2x^2+4x+1)(x-4)]$ ప్రమేయ అవధిని వర్తింపజేయ గా,

$$\underset{x\to 1}{Lt.}(y) = \underset{x\to 1}{Lt.}\mathbf{[(2x^2+4x+1)(x-4)]}$$

$$= [\underset{x\to 1}{Lt.}2(x^2) + \underset{x\to 1}{Lt.}4(x)+Lt.(1)].\ [\underset{x\to 1}{Lt.}(x-4)]$$

$$= Lt.2(1^2) + Lt.4(1)+Lt.(1).Lt.(1-4)$$

$$= [2(1) + 4(1)+1][-3]$$

$$= [2 + 4 + 1][-3]$$

$$= 7(-3) = -21$$

2.6.10 ఉదాహరణ – 10. వసూలు చేయబడును వడ్డీ రేటు, అరువు తీసుకొను మూలధన పరిమాణం పై ఆధారపడివుంటుంది అని అనుకుందాం. అయితే, దిగువ అవధిలో నిర్దిష్ట కనీస వడ్డీ రేటు ఉంది, అది ఎప్పటికీ తగ్గదు. కనీస వడ్డీ రేటు రెండు శాతంగా ఉండనివ్వండి. అప్పుడు వడ్డీ రేటు ప్రమేయాన్ని, ఈ కింది విదంగా రాయవచ్చు:

$$r = 2+ + \frac{a}{K}$$

ఇక్కడ r అనేది వడ్డీ రేటు, K అనేది అరువు తెచ్చుకున్న మూలధనం మరియు a అనేది ఎప్పటికీ తగ్గని కనిష్ఠ వడ్డీ రేటు (స్థిరం). అరువు తీసుకున్న మూలధనం మొత్తం అనంతానికి చేరువైనప్పుడు, ప్రమేయాన్ని, ఇలా రాయవచ్చు:

$$\underset{K\to\infty}{\text{Lt.}}(r) = \underset{K\to\infty}{\text{Lt.}}\ 2 + \underset{K\to\infty}{\text{Lt.}}\left(\frac{a}{K}\right)$$

= 2 + 0 (ఎందుకంటే a స్థిరాంకం)

2.7 అవధిలను మూల్యాంకనం చేయడానికి అవకలనం అనువర్తనాలు

కొన్నిసార్లు, నిర్దిష్ట ప్రమేయ అవధిని అంచనా వేయడానికి అవకలనం భావన ఉపయోగించబడుతుంది. ఒక ప్రమేయం అందమైన విలువకు (finite value) చేరుకున్నప్పుడు, ఆ ప్రమేయ భేదభాగ విభక్తం (Difference Quotient) ఆశించు అవధి విలువ అవకలనం అని తరువాత పాఠంలో మనం తెలుసుకుందాం. ఒక స్వతంత్ర చలరాశి లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులతో కూడిన ప్రమేయ అవకలనం భావన, వాటి నియమాలను గూర్చి పరిచయం చేసి, తెలుసుకునే ముందు, ఈ క్రింది విధంగా రుజువులు లేకుండా అవకాలనాల మూడు ప్రాథమిక నియమాలను తెలియజేస్తాము:

i. $y = x^n$ వంటి ఘాత ప్రమేయం (Power Function) అవకలనం, $n.n^{(n-1)}$,

ii. స్థిరాంక (Constant) అవకలనం సున్నా(Zero) అవుతుంది.

iii. ఘాత ప్రమేయం, స్థిరవిలువతో గుణించబడి ఉంటే, అనగా $y = c.x^n$, అవకలనం $ncx^{(n-1)}$.

ప్రమేయం అవధిలను అంచనా వేయడానికి అవకలనాల ఈ మూడు ప్రాథమిక నియమాలను ఉపయోగించుకుందాం.

2.7.1 ఉదాహరణ 11: మూల్యాంకనం చేయండి:

$$\underset{x\to a}{\textbf{Lt.}}\ \frac{(x^n - a^n)}{(x-a)}$$

పరిష్కారం: ఇవ్వబడిన ప్రమేయంకు అవధిని నేరుగా వర్తింపజేయడం వల్ల సున్నాతో భాగించబడుతుంది. కాబట్టి, ముందుగా ప్రమేయ పదిల ను అవకలనం చేసి, ఆపై అవధిని వర్తింపజేద్దాం. ప్రమేయ, లవం హారంలోని పదిలను అవకలనం చేయగా,

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(a^n)}{\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(a)}$$

x^n అవకలనం($\frac{d}{dx}(x^n)$), $n.n^{(n-1)}$ అని మనకు తెలుసు. స్థిరాంకం (a) ఘాతం n అయినప్పటికీ, (a^n) స్థిరాంకం అవుతుంది. స్థిరాంకం అంటే మార్పులేని పరిమాణం. కాబటి మార్పును తెలియజేసే అవకలనం విలువ స్థిరాంకంకు సున్నా అవుతుంది. x^n ప్రత్యేక సందర్భం అయిన x లేదా x^1 అవకలనం 1 (ఎందుకంటే $n.n^{(n-1)} = 1.1^{(1-1)} = 1^0 = 1$ నియమాన్ని వర్తింపజేస్తుంది). ఈ విధంగా

$$\frac{(nx^{n-1}-0)}{(1-0)} = \frac{nx^{n-1}}{1} = nx^{n-1}$$

ఇప్పుడు పై ప్రమేయంకు అవధిని వర్తింపజేయగా,

$$\underset{x\to a}{\text{Lt.}}\ (nx^{n-1}) = na^{(n-1)}$$

2.7.2 ఉదాహరణ 12: మూల్యాంకనం చేయండి:

$$\underset{x\to 3}{\textbf{Lt.}}\ \frac{(x^3-27)}{(x-3)}$$

పరిష్కారం: పైన పేర్కొన్న ప్రమేయంకు అవధిని నేరుగా వర్తింపజేయడం వల్ల, సున్నాతో భాగించబడుతుంది. కాబట్టి, ముందుగా ప్రమేయ పదిలను అవకలనం చేసి, ఆపై అవధిని వర్తింపజేద్దాం. పైన చర్చించిన పద్ధతిని ఉపయోగించి లవం, హారం రెండింటిలోనూ పదిలను అవకలనం చేయడం ద్వారా,

$$= \frac{\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(27)}{\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(3)}$$

$$= \frac{(3x^{3-1}-0)}{(1-0)} = 3x^{3-1} = 3x^2$$ మనకు లభిస్తుంది.

ఇప్పుడు $x\to 3$ నేపద్యంలో, $3x^2$ ప్రమేయంకు అవధిని వర్తింపజేయగా,

$$= 3.(3)^2 = 3(9) = 27.$$

2.8 ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నత:

ప్రమేయ అవధి భావన, దాని మూల్యాంకనాలు "ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత" అనే భావనతో దగ్గరి సంబంధం కలిగి ఉంటాయి. ఒక ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత ఆర్థిక అనువర్తనాలలో చాలా విస్తృతంగా ఉపయోగించబడే "అవకలనం" భావనను అర్థం చేసుకోవడానికి చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

2.8.1 అవిచ్ఛిన్నత - నిర్వచనం

ఒక ప్రమేయం, $y = f(x)$, x ప్రదేశంలో (ఇచ్చిన సందర్భంలో x తీసుకునే విలువల సమితి) N బిందువుకు దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు, అవధిని కలిగి ఉండే నేపథ్యంలోనూ, $x = N$, అయినప్పుడు, ఈ అవధి కూడా $f(N)$కి సమానంగా ఉన్నప్పుడు, (ప్రమేయం (y) విలువకు సమానం), ఆ ప్రమేయం, N బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నతగా (Continuous) ఉందని చెప్పబడుతుంది. మరింత నిర్దిష్టంగా చెప్పాలంటే, "అవిచ్ఛిన్నత" అనే పదం మూడు షరతులను సంతృప్తి పరచాలి.

i) N- బిందువు తప్పనిసరిగా ప్రమేయం ప్రదేశంలో ఉండాలి;

ii) $x \to N$ అయినప్పుడు, ప్రమేయం తప్పనిసరిగా అవధిని కలిగి ఉండాలి;

iii) అవధి తప్పనిసరిగా $f(N)$ విలువతో సమానంగా ఉండాలి.

ప్రమేయం అవధిని చర్చిస్తున్నప్పుడు, క్రమబద్ధం చేయబడిన జత (N, L) పరిగణించబడలేదని గమనించడం సముచితం. కానీ ఇప్పుడు ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత చర్చలో, మనం ప్రత్యేకంగా క్రమబద్ధ చేసిన ఈ జత బిందువును చేర్చాము. వాస్తవానికి, అవిచ్ఛిన్నత మూడవ షరతులో, ఆ నిర్దిష్ట బిందువు, Nలో ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నతగా పరిగణించాలంటే, ప్రమేయం గ్రాఫ్‌లో క్రమబద్ధం చేయబడిన జత (N,L) తప్పనిసరిగా ఉండాలి అని చెప్పబడింది. ఒక ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత భావనను వివరించడానికి, మనం నాలుగు పటాల సమితిని తీసుకుందాం. వీటిలో ఏది, ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత షరతులను సంతృప్తి పరుస్తుందో చూద్దాం.

పటం 2.1 (a) నుంచి గమనించినట్లుగా, ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నతకు అవసరమైన అన్ని షరతులను N- బిందువు వద్ద తీర్చబడతాయి. N- బిందువు ప్రమేయం ప్రదేశంలో ఉంది. $x \rightarrow N$గా ఉన్నప్పుడు, ప్రమేయం y అవధి Lని కలిగి ఉంది. అవధి కూడా N వద్ద ప్రమేయం విలువకు సమానంగా ఉంటుంది. ఆ విధంగా ఆ వక్రరేఖ సూచించిన ప్రమేయం, N వద్ద అవిచ్ఛిన్నతంగా ఉంటుంది.

అదే విధంగా పటం 2.1 (b)లో సూచించబడిన ప్రమేయం కూడా N వద్ద అవిచ్ఛిన్నతంగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే ప్రమేయం ప్రదేశంలో N విలువకు x చేరువైనందున L అనేది ప్రమేయం అవధి అవుతుంది. అంతేకాకుండా, L అనేది N వద్ద ప్రమేయం విలువ కూడా. ఒక ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత కోసం, $x = N$ వద్ద వక్రరేఖ మృదువైనదిగా (smooth) ఉండనవసరం లేదు. పటం 2.1(b)లో కనపరచినట్లు, ఇది పదునైన బిందువుగా (Sharp point) ఉంది. అయినప్పటికీ, ఇది అవిచ్ఛిన్నతంగా భావించబడుతుంది.

పటం 2.1(c)లో చూపిన ప్రమేయ వక్రరేఖ N వద్ద విచ్ఛిన్నతకు ఎదురైంది. ఎందుకంటే, ఆ బిందువులో అవధి ఉండదు. అందువల్ల, ఈ బిందువులో అవిచ్ఛిన్నతకు అవసరమైన రెండవ షరతు ఉల్లంఘించబడింది. అయితే, ప్రమేయం (0,N) ప్రదేశంలో, అలాగే విచ్ఛిన్నత తరువాత (N, ∞) ప్రదేశంలో అవిచ్ఛిన్నత షరతులు పూరింపబడ్డాయి. కాని ప్రమేయ L_1, L_2 వ్యాప్తిల (Range) పరిధిలో విచ్ఛిన్నత ఉంది.

స్పష్టంగా, పటం - 2.1(d)లో సూచించబడిన ప్రమేయం $x= N$ వద్ద విచ్ఛిన్నతగా ఉంది. ఈ సందర్భంలో, అవిచ్ఛిన్నత మొదటి షరతుకి భిన్నంగా ప్రమేయ ప్రదేశం నుంచి, N మినహాయించబడినందున విచ్ఛిన్నత ఏర్పడింది.

మునుపటి చర్చ నుంచి, పటం-2.1(బి)లో ఉన్నట్లుగా పదునైన బిందువు అవిచ్ఛిన్నతతో అనుగుణతలో ఉన్నాయని స్పష్టమవుతుంది. కానీ ప్రమేయ ప్రదేశంలో (Domain) లేదా వ్యాప్తిలో (Range) ఉన్న అంతరాలు ఆమోదించబడవు, ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నతకు అనుగుణంగా లేవు.

పటం 2.1 ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నత, విచ్ఛిన్నత రకాలు

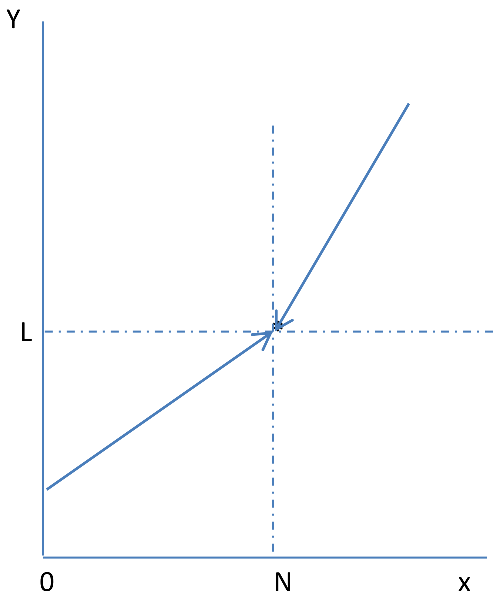


Figure 2.1 (a)

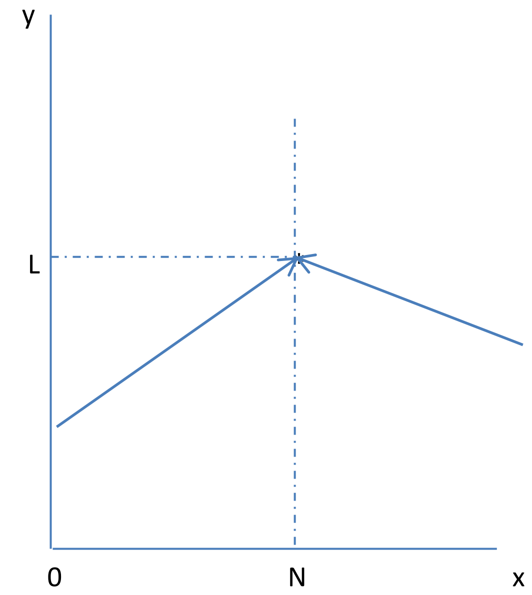


Figure 2.1 (b)

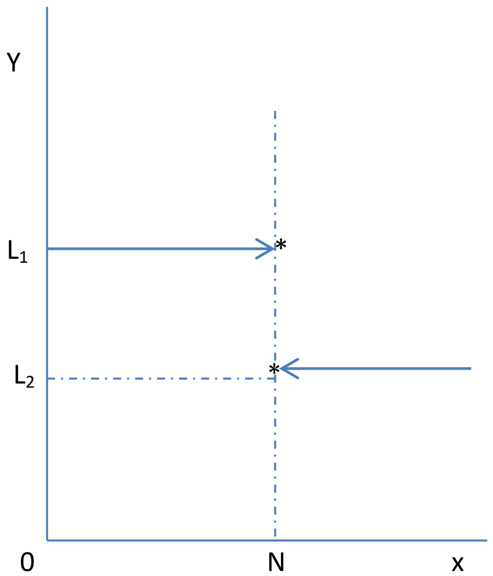


Figure 2.1 (c)

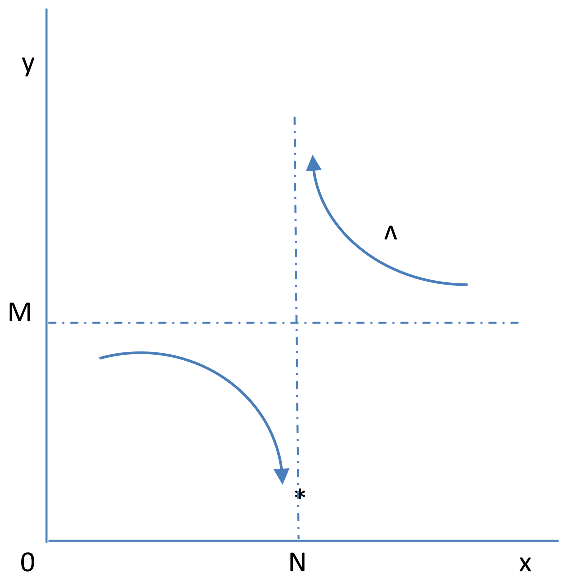


Figure 2.1 (d)

సరళంగా చెప్పాలంటే, ఒక నిర్దిష్ట విరామంలో నిరంతరాయంగా ఉండే ప్రమేయం అంటే, కాగితం లేదా కంప్యూటర్ స్క్రీన్ నుంచి పెన్సిల్ లేదా పెన్ లేదా మౌస్‌ను పైకి ఎత్తకుండా లేదా తీయకుండా రేఖను గీయడాని సూచిస్తుంది. పటం 2.1(బి)లో ఉన్నట్లుగా పదునైన వంపులను గీయడానికి కూడా మనం పెన్సిల్ లేదా పెన్ను ఎత్తడం లేదా తీయడం అవసరం లేదని గమనించాలి. అయితే, పెన్సిల్ లేదా పెన్ను ఎత్తకుండా అవిచ్ఛిన్నత వక్ర రేఖను గీయడం అసాధ్యం.

2.9 సారాంశం

మొదటి పాఠంలో ప్రమేయం, వివిధ రకాల ప్రమేయ భావనను అర్థం చేసుకున్న తర్వాత, మనం ఈ పాఠంలో 'ప్రమేయ అవధి' భావనను నేర్చుకున్నాము. మనం కొన్ని సాధారణ, ఆచరణాత్మక ఉదాహరణల ద్వారా ప్రమేయ అవధి భావనను పరిచయం చేసాము. మనం అవధికి అధికారిక నిర్వచనం ఇచ్చాము. వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ దట్టమైనది, లెక్కించలేనిది కనుక, మనకు తదుపరి సంఖ్య తెలియదు. కాబట్టి, ఈ కదిలే ప్రక్రియను సాయాచిత్రం తీసి, స్థిర చిత్రాన్ని పొందడం ద్వారా ప్రమేయ అవధిని అంచనా వేయబడుతుంది. మనం రెండు రకాల అవధి సిద్ధాంతాలను నేర్చుకున్నాము. అవి ఒకే ప్రమేయంతో కూడిన అవధి సిద్ధాంతం, ఒకటి కంటే ఎక్కువ ప్రమేయంలను కలిగి ఉన్న అవధి సిద్ధాంతాలు. ఈ అవధి సిద్ధాంతాలు కొన్ని సంక్లిష్టమైన అవధి సమస్యలను భౌతికంగా సరళీకరించడానికి మనకు సహాయపడతాయి. ప్రమేయం అవధి, ప్రమేయం అవకలనంకి దగ్గరి సంబంధం ఉన్న మరొక భావన, ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత, విచ్ఛిన్నత. మనం రేఖా చిత్ర ఉదహరింపును ఉపయోగించి ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత భావనను వివరించాము. మనం ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నత, విచ్ఛిన్నతకు మధ్య స్పష్టంగా తేడాను చర్చించాము. సరళంగా చెప్పాలంటే, పెన్సిల్ లేదా పెన్ను ఎత్తకుండా వక్రరేఖను గీయగలిగితే, ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత కలిగి ఉంటుందని చెప్పబడుతుంది, లేకుంటే, ప్రమేయం విచ్ఛిన్నత కలిగిఉంటుంది.

2.10 పదకోశం

1. Limit of a function	:	ప్రమేయ అవధి
2. Sum-limit Theorem	:	సంకలన అవధి సిద్ధాంతం
3. Product limit theorem	:	లబ్ధ అవధి సిద్ధాంతం
4. Quotient limit theorem	:	విభక్త అవధి సిద్ధాంతం
5. Continuity of a function	:	ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నత
6. Differentiability of a function	:	ప్రమేయం అవకలనం

2.11 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

2.11.1 లఘు సమాధాన ప్రశ్నలు

1. Define limit of the function
2. State sum-Difference theorem of limit
3. Evaluate. Lt. (x2+3x-4) as x→2.
4. Define continuity of a function

1. ప్రమేయ అవధిని నిర్వచించండి.

2. సంకలనం - వ్యవకలనం అవధి సిద్ధాంతాన్ని తెలుపుము.

3. Lt. (x2+3x-4) x→2గాఉన్నప్పుడు మూల్యాంకనం చేయండి.

4. ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచించండి.

2.11.2 Essay type answer questions

1. అవధి సిద్ధాంతాలను చర్చించండి.

2. మూల్యాంకనం చేయండి:

$$\frac{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{(x^m - a^m)}{(x-a)}}{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{(x^n - a^n)}{(x-a)}}$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{(x^3 - 27)}{(x-3)}$

4. రేఖా చిత్ర ఉదహరింపుతో ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నతను వివరించండి.

2.12 సూచించబడిన పుస్తకాలు

1. Alpha Chiang : Fundamental Methods of Mathematical Economics

2. R. G. D. Allen: Mathematical Analysis for Economists

3. Mehta and Medhani: Mathematics for Economists

****

భాగం - 1

పాఠము - 3
సరళ రేఖ, అర్థశాస్త్రంలో దాని అనువర్తనాలు

పాఠం రూపురేఖలు

3.0 పాఠం ఆశించించు ఫలితాలు

ఈ పాఠాన్ని విజయవంతంగా నేర్చుకున్న తర్వాత, మీరు

i) సరళ ప్రమేయం, సరళరేఖా సమీకరణం, అంతర ఖండ, వాలు అనే భావనలను గూర్చి అర్థం చేసుకోగలరు;

ii) ఇవ్వబడిన భిందువుల ద్వారా పయనించు సరళ రేఖను ఎలా నిర్మించాలని తెలుసుకోగలరు;

iii) సరళ డిమాండ్ రేఖ, సరళ సప్లై రేఖ, సమతౌల్య స్థితిని విశ్లేషించ గలరు;

iv) సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో సగటు రాబడి రేఖ, ఉపాంత రాబడి రేఖల సరళ ప్రమేయంను వర్తింపజేయ గలరు;

v) స్థూల అర్థశాస్త్రంలో సగటు వినియోగ ప్రమేయం, సగటు పొదుపు ప్రమేయం, పెట్టుబడి ప్రమేయం, మొదలగు భావనల అనువర్తనాలను ప్రదర్శించ గలరు;

3.1 పరిచయం

రెండవ పాఠంలో ప్రమేయాల అవధి, అవిచ్ఛిన్నత అను భావనలను గూర్చి వివరంగా తీలుసుకున్నాం . ఈ భావనలు, ప్రమేయాల అవకలని అని పిలువబడే అత్యంత ముఖ్యమైన భావనను అర్థం చేసుకోవడానికి మనకు సహాయపడతాయి. బహుపాధి ప్రమేయంలో ప్రధానమైనది సరళ ప్రమేయం. అర్థశాస్త్రంలో సరళ ప్రమేయంకు అనేక అనువర్తనాలున్నాయి. ఈ పాఠంలో సరళ ప్రమేయం అనే భావనను, దాని నిర్మాణాన్ని గూర్చి, అర్థశాస్త్రంలో ఈ ప్రమేయంకున్న అనేక అనువర్తనాలను గూర్చి విపులంగా తెలుసుకుంటాం.

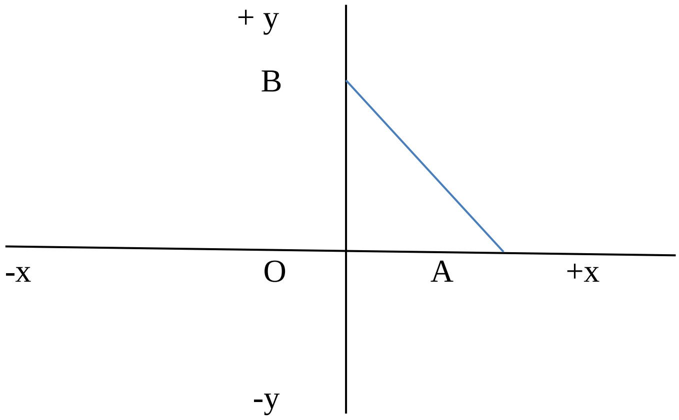
3.2 సరళరేఖ:

ax +by+c=0 అనే సమీకరణంలో, a, b, c లు స్థిర రాశులైతే, ఆ సమీకరణాని, ఏక ఘాత సమీకరణం (First Degree Equation) అని అంటాం. ఈ సమీకరణం నుంచి b≠0 అయినప్పుడు, (ax +by+c=0, by = -ax-c, y = -ax/b –c/b) లేదా y = $\frac{-ax}{b} - \frac{-c}{b}$, (ax +by+c=0, ax = -by-c, x = -by/a-c/a), లేదా x = $\frac{-by}{a} - \frac{-c}{a}$, అనే ప్రమేయాలను రాబట్టవచ్చు. ఈ సమీకరణాలను సంతృప్తి పరచే బింధువులన్ని ఒకే సరళ రేఖ పై ఉంటాయి. కాబటి ax +by+c=0 అనే సమీకరణానికి రేఖాచిత్రం సరళ రేఖ అవుతుంది. అంతే కాకుండా, ఏ సరళ రేఖకు అయినా, సమీకరణం ఈ రూపంలోనే ఉంటుందని నిరూపించవచ్చు. ax+by+c=0 సమీకరణం, సరళ రేఖ సమీకరణం లేదా సరళ రేఖ సార్వత్రిక రూపమని చెప్ప వచ్చు. ఉదాహరణకు, ఒక 2x+3y-7=0 సరళ రేఖ సమీకరణం అయితే, y = 2x+3, x=3y-5 కూడా సరళ రేఖ సమీకరణాలు అవుతాయి. ఒక సరళ రేఖ సమీకరణం, అవి ఉండే స్థలాన్ని బట్టి, వివిధ రూపాలలో ఉంటుంది.

3.2.1 సరళరేఖ అంతర ఖండం (Intercept of the Linear Curve)

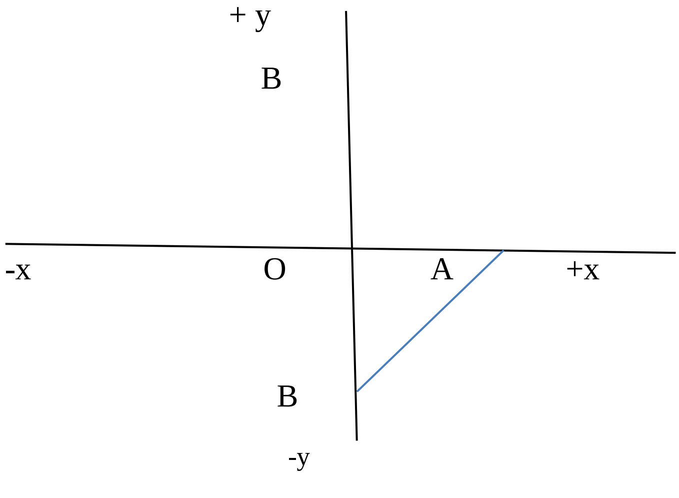
ఒక సరళ రేఖ x, y అక్షాలను A, B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే, OA, OB లను, x, y అక్షాలపై ఆ సరళ రేఖ చేసిన "అంతర ఖండాలు" (Intercepts) అని అంటాం.

పటం 3.1 a, b రెండూ రెండూ ధనాత్మకం



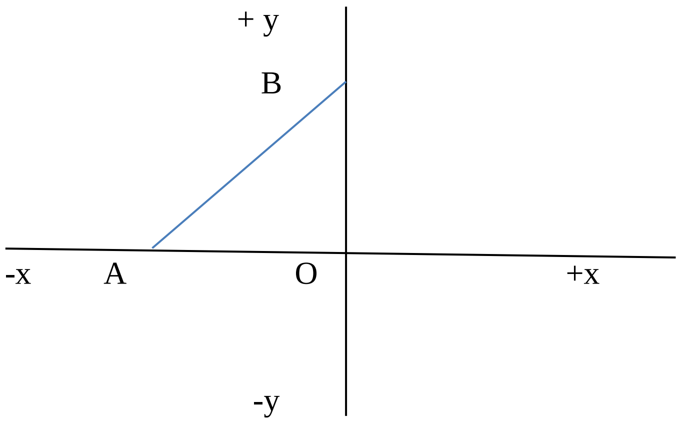
OA =a,OB = b అయితే, AB, అనే సరళరేఖకు సమీకరణం, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ అవుతుందని రుజువు చెయవచ్చు. ఈ రకమైన సమీకరణాని అంతరఖండ రూపం గల సమీకరణం అని అంటాం. ఉదాహరణకు, a = 5, b = 7 అయితే, ఈ సమీకరణం $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$ అవుతుంది. అనగా, 7x+5y-35 =0 అవుతుంది. ఈ a, b "అంతర ఖండాలు పటం 3.1లో కనపరచినట్లు, ధనాత్మకంగానే ఉండనవసరంలేదు. a,b లలో ఒకటి కాని లేదా, రెండూ కాని రుణాత్మకంగా కూడా ఉండొచ్చు. కింది పటాలను అధ్యయనం చేయండి.

పటం -3.2 అంతర ఖండా లలో, a ధనాత్మకం, b రుణాత్మకం



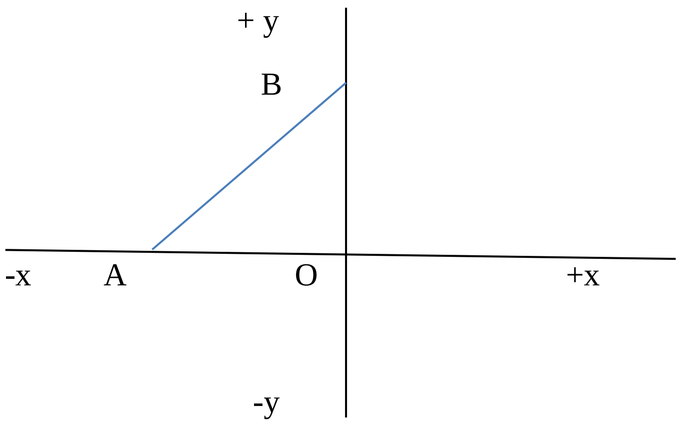
ఈ a, b "అంతర ఖండాలు పటం 3.2లో కనపరచినట్లు, a, ధనాత్మకంగా, b రుణాత్మకంగా ఉన్నాయి.

పటం 3.3 అంతర ఖండా లలో, a రుణాత్మకం, b ధనాత్మకం



పటం 3.3లో కనపరచినట్లు, ఈ a, b "అంతర ఖండా లలో a రుణాత్మకం గా, b ధనాత్మకంగా ఉన్నాయి.

పటం 3.4 అంతర ఖండా లలో, a, b రెండూ రుణాత్మకం



పటం 3.4లో కనపరచినట్లు, a, b "అంతర ఖండాలు రెండూ రుణాత్మకంగా, ఉన్నాయి.

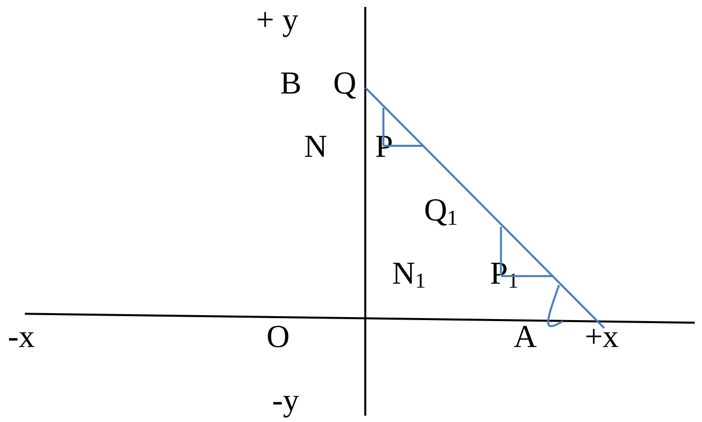
అర్థశాస్త్రంలో సాధారణంగా రుణాత్మక విలువలు అర్థరహితంగా ఉంటాయి. ఉదారణకు, రుణాత్మక డిమాండ్, రుణాత్మక సప్లై, రుణాత్మక పెట్టుబడులు వుండవు. కాబట్టి, x, y అంతర ఖండాలు రెండూ ధనాత్మకంగానే మొదటి చతుర్భుజంలో ఉంటాయి.

3.2.2 సరళరేఖ వాలు (Slope of the Linear Curve)

పైన వివరించిన సరళ రేఖలో P, Q అనే రెండు బిందువులను తీసుకుందాం. P నుంచి X అక్షయానికి సమాంతరంగా, Q నుంచి y అక్షయానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖలు, N వద్ద ఖండిస్తున్నాయని అనుకుందాం. అప్పుడు, AB సరళ రేఖ, PN అనే క్షితిజ దూరం (Horizontal Distance) పై ఎంత ఎత్తులో ఉందో, NQ అనే ఊర్ధ్వ దూరం (Vertical Distance) తెలియజేస్తుంది. కాబాటి NQ/PN అనే నిష్పత్తి ఒక యూనిట్ క్షితిజ దూరానికి AB అనే సరళ రేఖ ఎంత ఎత్తులో ఉందో, ఆ యెత్తును కొలుస్తుంది. AB సరళ రేఖపైన PQ బిందువులను ఎక్కడ తీసుకున్నా, ఈ నిష్పత్తి విలువ మార్పు లేని

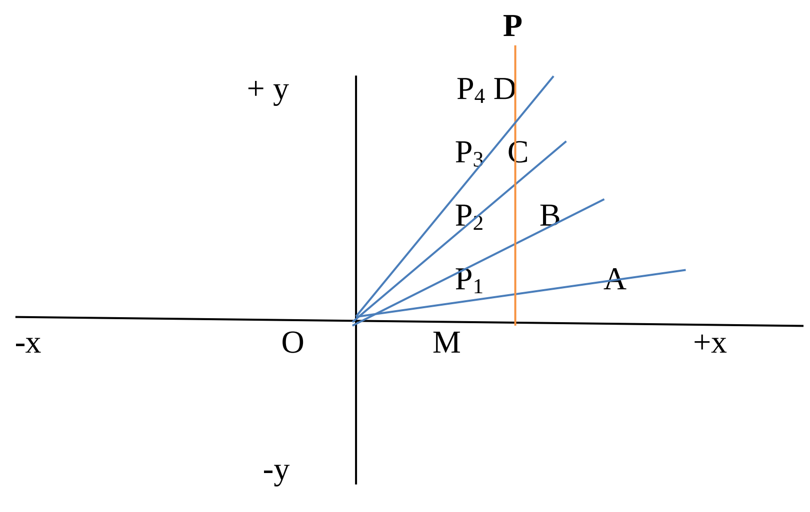
విదంగా స్థిరంగా ఉంటుంది అనే వాస్తవాన్ని మనం గుర్తు పెట్టుకోవాలి. ఉదాహరణకు, AB, సరళ రేఖపై, P_1, Q_1 అనే మరో రెండు బిందువులను తీసుకుందాం. P_1 నుంచి X అక్షయానికి. Q_1 నుంచి y అక్షయానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖలు, N_1 వద్ద ఖండిస్తున్నాయని అనుకుందాం. అప్పుడు త్రిభుజాలు, PQN, $P_1Q_1N_1$ లు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి. కాబాటి నిష్పత్తి NQ/PN = N_1Q_1/P_1N_1 అని నిరూపించవచ్చు. X - అక్షయానికి సంబంధించి, ఈ స్థిర నిష్పత్తిని AB సరళ రేఖ వాలు (Slope of the Line AB) అంటాం.

పటం 3.5 సరళ రేఖ వాలు



ఒక సరళ రేఖ వాలు, ఆ సరళ రేఖ ఎంత ఏటవాలుగా ఉంది అనే విషయాన్ని నిర్ధారిస్తుంది. అలాగే, ఒక సరళరేఖ ఏటవాలుతనం (steepness) ఎక్కువ అయ్యే కొద్దీ, దాని వాలు విలువ, పెరుగుతూ ఉంటుంది. ఈ వివరాలను పటం 3.5 ద్వారా వివరించగలం.

పటం 3.6 సరళరేఖ ఏటవాలుతనం, దాని వాలు విలువ



OA వాలు = $\frac{MP_1}{OM}$, OB వాలు = $\frac{MP_2}{OM}$, OB వాలు = $\frac{MP_3}{OM}$, OB వాలు = $\frac{MP_4}{OM}$. పటం 3.6లో కనపరచినట్లు, సరళరేఖ ఏటవాలుతనం పెరిగే కొద్దీ, దాని వాలు విలువ కూడా పెరుగుతుంది. అనగా వాలు $\frac{MP_1}{OM}$ < వాలు $\frac{MP_2}{OM}$ <వాలు $\frac{MP_3}{OM}$ <వాలు $\frac{MP_4}{OM}$ లేదా $\frac{MP_4}{OM} > \frac{MP_3}{OM} > \frac{MP_2}{OM} > \frac{MP_1}{OM}$.

3.2.3 వాలు, టాన్ θ

ఒక సరళ రేఖ X- అక్షంతో కోణంను చేస్తే, ఆ వాలును టాన్ - θ అంటాం.

$$\text{టాన్} - \theta = \frac{OB}{OA}$$

X -అక్షం వాలు, X –అక్షంతో సున్నా అవుతుంది. కాబట్టి, X –అక్షంతో సమానతరంగా ఉన్న ఏ రేఖ కైనా వాలు సున్నా అవుతుంది. ఇదివరకే వివరించినట్లు, సరళరేఖ ఏటవాలుతనం పెరిగే కొద్దీ, దాని వాలు విలువ కూడా పెరుగుతుంది. సరళ రేఖ ఏటవాలుతనం పెరిగి, Y- అక్షంతో విలీనం అయినప్పుడు, వాలు విలువ 90^{o} చేరుకుంటుంది. అనగా, X అక్షం, Y అక్షంతో 90^{o} కోణాన్ని చేస్తుంది.

సరళరేఖ వాలుకు సంబంధించి ఇదివరకు మనం చర్చించిన అంశాలను క్లుప్తంగా ఈ విదంగా పేర్కొనవచ్చు

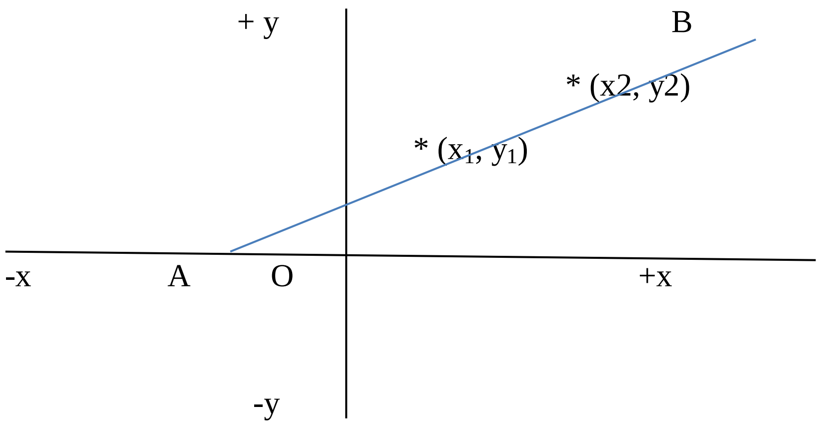
1. ఒక సరళ రేఖ వాలును సాధారణంగా స్-అక్షంకు సంబంధించి మాత్రమే తెలియబరుస్తాం.
2. ఒక సరళ రేఖ ఎడమ నుంచి కుడికి పైకి వాలి ఉంటే, దాని వాలు ధనాత్మకం గాను, ఎడమ నుంచి కుడికి కిందికి వాలివుంటే, దాని వాలు రుణాత్మకంగాను ఉంటుంది.
3. ఒక సరళరేఖ ఏటవాలుతనం పెరిగే కొద్దీ, దాని వాలు విలువ కూడా పెరుగుతుంది.
4. X - అక్షం వాలు సున్నా, Y - అక్షం వాలు అనంతం.

3.2.4 ఇవ్వ బడిన బిందువుల నుంచి పోవు సరళ రేఖ

ఒక సరళ రేఖ, (x_1, y_1), (x_2, y_2)అను రెండు భిందువుల ద్వారా పోతే, దాని వాలు $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ అని, దాని సమీకరణం, $(y-y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x-x_1)$ అని నిరూపించవచ్చు. వాలు m అని గుర్తిస్తే సమీకరణం,

$(y-y_1) = m\,(x-x_1)$ అవుతుంది.

పటం 3.7 ఇవ్వ బడిన బిందువుల నుంచి పోవు సరళ రేఖ



ఉదాహరణకు, ఒక సరళ రేఖ (2,5), (4,8) అను భిందువుల నుంచి పోతే, దాని సమీకరణం

$(y-5) = \frac{8-5}{4-2}(x-2)$ అవుతుంది.

$(y-5) = \frac{3}{2}(x-2)$

$(y-5) = \frac{1}{2}(3x-6)$

$\frac{2}{1}(y-5) = (3x-6)$

$2y-10 = 3x-6$

$-3x+2y-10+6=0$

$-3x + 2y-4=0$ లేదా

$3x-2y+4 = 0$

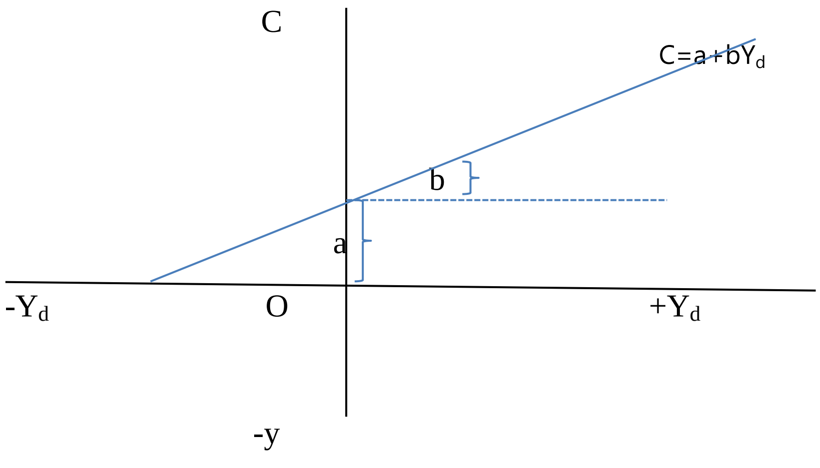
3.3 అర్థశాస్త్రంలో సరళ రేఖ అనువర్తనాలు

అర్థశాస్త్రంలో సరళ రేఖ అనేక అనువర్తనాలను కలిగిఉంది. వాటిలో కొన్ని ప్రదాన అనువర్తనాలను గూర్చి క్లుప్తంగా తెలుసుకుంటాం.

3.3.1 వినియోగ ప్రమేయం

అర్థశాస్త్రంలో వినియోగ ప్రమేయం సరళరేఖ ఆకారం కలిగిఉంటుందని ప్రమేయం చేయబడుతుంది. వినియోగం పనితీరు ప్రజల వాస్తవ ప్రవర్తన నుంచిఉద్భవించింది. వినియోగ ప్రమేయం సాదాహరణ రూపం, $C = f(Y_d)$. దీని సరళ రేఖ రూపం $C=a+bY_d$. ఈ సమీకరణంలో C వినియోగ పరిమాణాన్ని, Y_d **వ్యహార** ఆదాయాన్ని తెలియజేస్తాయి. ఉదాహరణకు, $C = 500+0.8Y_d$ వినియోగ ప్రమేయంగా భావించవచ్చు.

పటం 3.8 వినియోగ ప్రమేయం



ఆదాయం సున్నగా ఉన్నప్పటికీ వినియోగం ధనాత్మకంగా ఉంటుందనే వాస్తవాన్ని మనం పటం 3.8 ద్వారా గుర్తించవచ్చు. పటంలో ఈ పరిమాణం 'a'గా గుర్తించవచ్చు. సరళరేఖ వాలు ఉపాంత వినియోగ

ప్రవృత్తిని (Marginal Propensity to Consume) తెలియజేస్తుంది. ఆదాయం ఒక యూనిట్ పెరిగితే, వినియోగం ఏ మేరకు పెరుగుతుందనే విషయాన్ని ఇది స్పష్టం చేస్తుంది. ఇవ్వబడిన వినియోగ ప్రమేయం, C = 500+0.8Y అయితే, ఆదాయం 100 రూపాయలు పెరిగితే, వినియోగం 80 రూపాయలు పెరుగుతుంది.

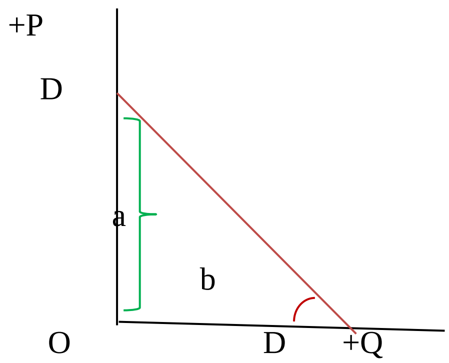
3.3. 2 డిమాండ్ ప్రమేయం

అర్ధశాస్త్రంలో వినియోగ ప్రమేయమువలె, డిమాండ్ ప్రమేయం కూడ, సరళరేఖ ఆకారం కలిగిఉంటుందని ప్రమేయం చేయబడుతుంది. ఏకైక స్వతంత్ర చలరాశి(ధర)తో, డిమాండ్ సమీకరణం ఈ విదంగా రాయబడుతుంది.

Q_d = a-bP. a>0, b<0.

ఇందులో P ధర,Q డిమాండ్ పరిమాణాన్ని తెలియజేస్తాయి. డిమాండ్ సమీకరణం చూచించు సరళ రేఖలో y-అంతర ఖండం విలువ ధనాత్మకం గాను, వాలు రుణాత్మకంగాను ఉంటాయి. డిమాండ్ ను ప్రభావితం చేసే ఇతర అంశాలు స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు, ధరకు వస్తు డిమాండ్ పరిమాణంకు మద్య విలోమ సంబంధం ఉంటుందనే డిమాండ్ సూత్రాన్ని రుణాత్మక వాలు విలువ తెలియజేస్తుంది.

పటం 3.9 డిమాండ్ సరళ రేఖ

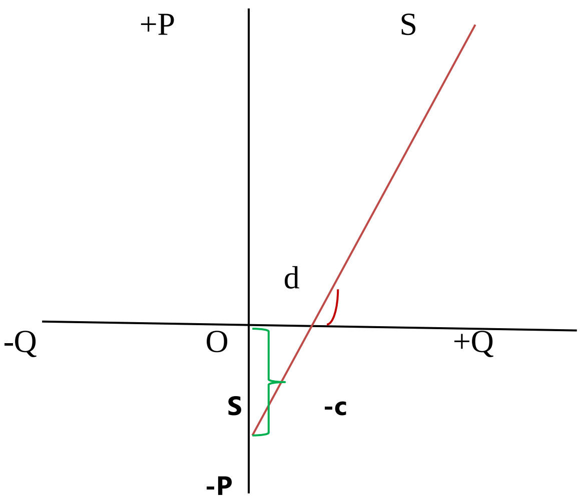


3.3.3 సప్లై ప్రమేయం ప్రమేయం

సప్లైను ప్రభావితం చేసే ఇతర అంశాలు స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు, వివిధ మార్కెట్ ధరల వద్ద సంస్థలు సప్లై చేయడానికి సిద్ధంగా ఉన్న వస్తు పరిమాణాలను సప్లై అంటాం. అనగా సప్లై, కేవలం వస్తు ధర పైన ఆధారపడి ఉంటుంది. అర్ధశాస్త్రంలో సప్లై ప్రమేయం కూడా సరళ రేఖ ఆకారం కలిగిఉంటుంది. సప్లై సరళ రేఖ రుణాత్మక ఊర్ధ్వ అంతర ఖండంను, ధనాత్మక వాలును కలిగి ఉంటుంది. డిమాండ్ ప్రమేయం వలె, సప్లై ప్రమేయ సమీకరణం కూడ, ఏకైక స్వతంత్ర చలరాశి (ధర)తో, ఈ విదంగా రాయబడుతుంది. ఈ విధమైన ఆర్ధిక నమూనాన్ని పాక్షిక సమతౌల్యం నమూనా (Partial Equilibrium Model) అంటాం.

Q_s = -c +dP. C<0, d>0

పటం 3.10 సప్లై సరళ రేఖ



3.3.4 పాక్షిక సమతౌల్య స్థితి (Partial Equilibrium State)

స్వేచ్ఛా పరమైన ఆర్థిక వ్యవస్థలో డిమాండ్, సప్లై శక్తులు పరస్పరం వ్యవహరించి సమతౌల్య ధరని, వస్తు పరిమాణాన్ని నిర్ణయిస్తాయి. ఆ ధర వద్ద డిమాండ్ పరిమాణం, సప్లై పరిమాణం రెండు సమానంగా ఉంటాయి. బహిర్గత శక్తులు ప్రభావితం చేస్తే తప్ప, అటువంటి స్థితి నుంచి తామంతట తామే మార్పు చెందాలి అనే ఆసక్తి ఎవరికి ఉండదు. అటువంటి స్థితిని అర్థశాస్త్రంలో 'సమతౌల్య స్థితి' అంటాం.

మన నమూనాలో మూడు సమీకరణాలు ఉన్నాయి. అవి

1. $Q_d = a-bP$, డిమాండ్ సమీకరణం

2. $Q_s = -c + dP$, సప్లై సమీకరణం

3. $Q_d = Q_s$, సమతౌల్య స్థితి

అలాగే మూడు అజ్ఞాత చలరాశులు ఉన్నాయి. అవి, Q_d, Q_s, P. సమతౌల్య స్థితిలో, $Q_d = Q_s$ కాబట్టి, వాటిని ఉమ్మడిగా Q అని గుర్తిస్తాం. అప్పుడు

$$Q = a-bP \quad ----1$$

$$Q = -c + dP \quad ---2$$

$$Q_d = Q_s, \quad ----3$$

మొదటి, రెండవ సమీకరణాలను మూడవ సమీకరణంల్లో ప్రతిక్షేపించగా

$$a-bP = -c + dP$$

$$-bp-dp = -c-a$$

ఇరువైపులా గుర్తులను మార్చగా (- గుర్తుతో ఇరువైపులా గుణించగా)

$$bp+dp = c+a$$

$$(b+d)P = c+a$$ లేదా

సమతౌల్య ధర, $P_e = \frac{a+c}{b+d}$

ఈ విధంగా సమతౌల్య ధరని పరామతుల (Parameters or Constants) రూపంలోనే ఇవ్వడం జరిగింది. ఇదే విదంగా, సమతౌలీయా వస్తు పరిమాణంను కూడా పరామతుల రూపంలో తెలియజేయవచ్చు

సమతౌల్య ధరకు సంబంధించిన పరామతులను, పై రెండు సమీకరణాలలో ఏదో ఒకదానిలో ప్రతీక్షేపించగా, మనకు సమతౌల్య వస్తు పరిమాణం లభిస్తుంది. మనం డిమాండ్ సమీకరణంను తీసుకుని, పరామతులను ప్రతీక్షేపించగా,

$$Q = a-bP$$

$$= a-b\left[\frac{a+c}{b+d}\right]$$

$$= a \frac{-ab-bc}{b+d}$$

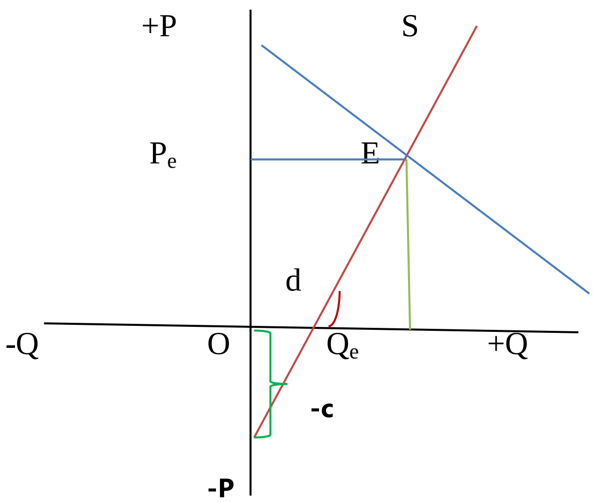
$$= \frac{a}{1} \frac{-ab-bc}{b+d}$$

$$= \frac{a(b+d)-ab-bc}{(b+d)}$$

$$= \frac{ab+ad-ab-bc}{b+d}$$

$$\mathbf{Q_e} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

పటం 3.11 సమతౌల్య స్థితి



ఈ విదంగా, సమతౌలీయా వస్తు పరిమాణంను కూడా పరామతుల రూపంలో తెలియజేయడం జరిగింది.

ఉదాహరణ: 1

ఇవ్వబడిన పరామతుల విలువలు కింది విదంగా ఉన్నాయి. వాటితో సమతౌల్య ధర, సమతౌల్య వస్తు పరిమాణాలను గణించుము.

a = 400, b = -2, c = -80, d = 34

పరిస్కారం:

సమతౌల్య ధర: $\boldsymbol{P_e} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{400-80}{-2+34} = \dfrac{320}{32} = \mathbf{10}$

వస్తు పరిమాణం: $\boldsymbol{P_e} = \dfrac{ad-bc}{b+d} = \dfrac{[400)(34)]-[(-2)(-80)]}{-2+34} = \dfrac{13600-160}{32} = \dfrac{13440}{32} = \mathbf{420}$

ఉదాహరణ: 2

$Q_d = Q_s$, అనే పాక్షిక సరళ మార్కెట్ నమూనాలో, $Q_d = 8\text{-}2P$, Q_s, = -4+4P. చలరాశుల తొలగింపు పద్ధతి ప్రకారం, విలువలను కనుగొనుము.

పరిస్కారం:

1. $Q_d = a\text{-}bP = 8\text{-}2P$, డిమాండ్ సమీకరణం ---1
2. $Q_s = \text{-}c + dP = \text{-}4+4P$, సప్లై సమీకరణం ----2
3. $Q_d = Q_s$, సమతౌల్య స్థితి - --3

సమతౌల్య స్థితి = $Q_d = Q_s$

మొదటి, రెండవ సమీకరణాలను మూడవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా,

8-2P = -4+4P

-2P-4P = -4-8

2P+4P = 4+8

6P = 12

$\mathbf{P_e}$ = 12/6 = 2

డిమాండ్ సమీకరణంలో P_e విలువను ప్రతిక్షేపించగా

Q = 8-2P

Q_e = 8-2(2) = 8-4 = **4**

సప్లై సమీకరణంల్లో P_e విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$Q = -4+4P$

$Q = -4+4(2) = -4+8 = \mathbf{4}$

కాబట్టి, $Q_d = Q_s = \mathbf{4}$

3.4 సరళ సాధారణ సమతౌల్య మార్కెట్ నమూనా (Linear General Equilibrium Model)

ప్రతి వస్తువుకు సాధారణంగా అనేక ప్రత్యామ్నాయాలు, పూరక వస్తువులు ఉంటాయి. అవి కూడా ఆ వస్తువుల డిమాండ్, సప్లై లను ప్రభావితం చేస్తాయి. కాబట్టి ఆ వస్తువు ధరతో పాటు అనేక ఇతర వస్తువుల ధరలను కూడా పరిగణలోకి తీసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంటుంది. మనం ఇదివరకు వివరించిన పాక్షిక సమతౌల్యం నమూనాలో సమతౌల్య స్థితికి అవసరమైన నిబంధన, మార్కెట్లో మిక్కిలి డిమాండ్ (Excess Demand) సూన్యంగా ఉండాలి. అనగా, Q_d-Q_s = 0. అనేక వస్తు మార్కెట్లను పరిగణలోనికి తీసుకున్నప్పుడు, సమతౌల్యం సాధించటానికి ప్రతి మార్కెట్ లోనూ మిక్కిలి డిమాండ్ సూన్యం గా ఉండాలి. అనగా, Q_{di}-Q_{si} = 0, I = 1, 2, 3,....n. ఇందులో అన్ని వస్తువుల ధరలు, అన్ని వస్తువుల పరిమాణాలు ఏక సమయంలో నిర్ణయించబడతాయి. ఇటువంటి మార్కెట్ డిమాండ్ నమూనాని సాధారణ సమతౌల్య మార్కెట్ నమూనా (General Equilibrium Model) అంటాం.

కింది సరళ సాధారణ సమతౌల్య మార్కెట్ నమూనాను పరీశీలించండి:

Q_{d1}-Q_{s1} = 0 --------------------1, మొదటి వస్తువు మార్కెట్లో మిక్కిలి డిమాండ్ సూన్యం

$Q_{d1} = a_0+a_1P_1+a_2P_2$--------------2 మొదటి వస్తువు, మార్కెట్ డిమాండ్ ప్రమేయం

$Q_{s1} = b_0+b_1P_1+b_2P_2$--------------3 మొదటి వస్తువు, మార్కెట్ సప్లై ప్రమేయం

Q_{d2}-Q_{s2} = 0 --------------------4 రెండవ వస్తువు మార్కెట్లో మిక్కిలి డిమాండ్ సూన్యం

$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$--------5 రెండవ వస్తువు, మార్కెట్ డిమాండ్ ప్రమేయం

$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$----------6 రెండవ వస్తువు, మార్కెట్ సప్లై ప్రమేయం

మొదటి సమీకరణంల్లో, రెండవ, మూడవ సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపించగా,

$(a_0+a_1P_1+a_2P_2) - (b_0+b_1P_1+b_2P_2) = 0$

$a_0+a_1P_1+a_2P_2-b_0-b_1P_1-b_2P_2 = 0$

$(a_0 - b_0)+(a_1 -b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2 = 0$ ------7

నాల్గవ సమీకరణంల్లో, ఐదవ, ఆరవ సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపించగా,

$(\alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) - (\beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2) = 0$

$(\alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = 0$

$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)P_1 + (\alpha_2 - \beta_2)P_2 = 0$ 8

$(a_i - b_i) = c_i$, $i = 0,1,2$

$(\alpha_i - \beta_i) = \gamma_i$, I = 0,1,3 అని అనుకుందాం.

$c_0 + c_1P_1 + c_2P_2 = 0$ లేదా $c_1P_1 + c_2P_2 = -c_0$ ------9

$\gamma_0 + \gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 = 0$ లేదా $\gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 = -\gamma_0$ -------10

ఈ ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థ మాత్రిక రూపంలో రాయగా

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

A X = B

ఇలా రూపొందించబడిన నమూనాన్ని, చలరాశుల తొలగింపు పద్ధతి కంటె, క్రామరు నియమం ద్వారా చాలా తేలికగా పరిష్కహరించవచ్చు. క్రెమెర్ నియమం గూర్చి వివరంగా 14వ పాఠంలో తెలుసుకుంటారు.

క్రామారు నియమం ప్రకారం

$$P_1 = \frac{D_1}{Det.A}, \quad P_2 = \frac{D_2}{Det.A}$$

ఇందులో D_1 అనేది, గుణకాల మాత్రికలో, మొదటి నిలువ వరుసలో ఉన్న విలువల స్థానంలో, సమీరకరణానికి కుడి వైపు ఉన్న స్థిర రాసుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వార లభించు నిర్ధారకం. D_2 అనేది, గుణకాల మాత్రికలో, రెండవ నిలువ వరుసలో ఉన్న విలువల స్థానంలో, సమీరకరణానికి కుడి వైపు ఉన్న స్థిర రాసుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వార లభించు నిర్ధారకం.

గుణకాల మాత్రిక నిర్ధారకం

$$\text{Det. A} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = |A| = c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1$$

D1, D2, మాత్రిక ల నిర్ధారకం

$$\text{Det. } D_1 = \begin{vmatrix} -c_0 & c_2 \\ -\gamma_0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = |A| = -c_0\gamma_2 + c_2\gamma_0$$

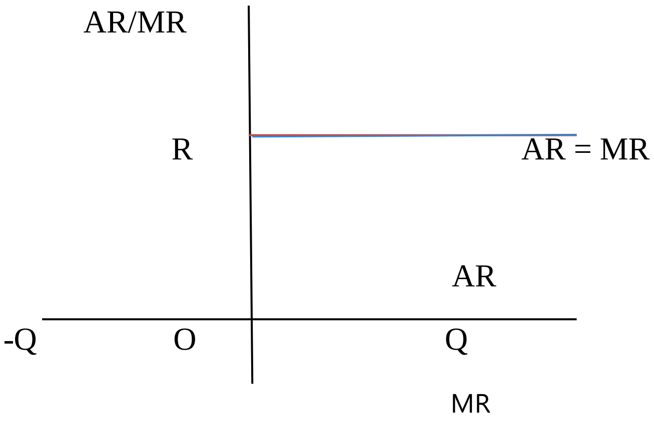
$$\text{Det. } D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & -c_0 \\ \gamma_1 & -\gamma_0 \end{vmatrix} |A| = -c_1\gamma_0 + c_0\gamma_1$$

కాబట్టి $P_1 = \dfrac{D_1}{Det.A} = \dfrac{-c_0\gamma_2 + c_2\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1} = P_2 = \dfrac{D_2}{Det.A}$

3.5 సరళ సగటు, ఉపాంత రాబడి రేఖలు:

అర్ధశాస్త్ర సిద్ధాంతం ప్రకారం, సగటు రాబడి రేఖ సరళ ఆకారం కలిగి ఉంటుంది. సగటు రాబడి వస్తు పరిమాణంపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. అనగా, C =f(Q). మొత్తం రాబడిని వస్తు పరిమాణంతో భాగించగా, మనకు సగటు రాబడి వస్తుంది. అదనంగా ఒక యూనిట్ వస్తువుని అమ్మకం చేసినప్పుడు, మొత్తం రాబడిలో వచ్చు మార్పును ఉపాంత రాబడి అంటాం. ఈ విదంగా ఉపాంత రాబడి కూడా వస్తు అమ్మకపు పరిమాణం పై ఆధారపడి ఉంటుంది. సంపూర్ణమైనపోటి మార్కెట్లో ఒక సంస్థ మార్కెట్ ధారని నిర్ణయించే అధికారం ఉండదు కాబట్టి, మార్కెట్లో ఉన్న ధర వద్ద అమ్మకాలను కొనసాగిస్తోంది. కాబట్టి ఆ సంస్థ సగటు రాబడి (AR), ఉపాంత రాబడి రేఖలు (MR) X- క్షితిజ అక్షం కు సమాంతరంగా ఉంటాయి. అదీ గాక AR రేఖతో MR రేఖ విలీనమై ఉంటాయి.

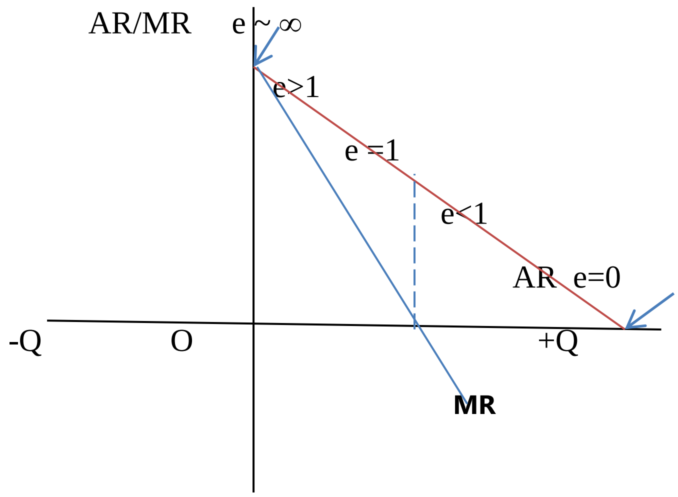
పటం 3.12 సంపూర్ణమైనపోటి మార్కెట్లో సగటు, ఉపాంత రాబడి రేఖలు



కాని ఏకస్వామ్యంలో AR, MR రేఖలు రెండు పై నుంచి కిందికి వాలి, రుణాత్మక వాలు కలిగిఉంటాయి. సరళ రేఖ మధ్య భాగంలో ధర వ్యాకోచత్వం ఒకటికి సమానంగా ఉంటుంది. మధ్య బిందువుకు పైన ఊర్ధ్వ అక్షంకు కింద వ్యాకోచత్వం ఒకటి కంటే ఎక్కువగాను, ఊర్ధ్వ అక్షంలో, వ్యాకోచత్వం అనంతం గాను ఉంటాయి. మధ్య బిందువుకు కింద, క్షితిజ అక్షం కు పైన వ్యాకోచత్వం ఒకటి కంటే

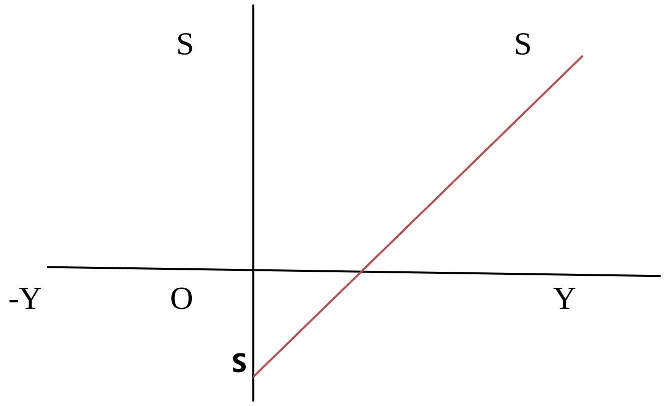
తక్కువగాను, సున్నా కంటే ఎక్కువగాను ఉంటాయి. క్షితిజ అక్షం వద్ద వ్యాకోచత్వం సున్నాగా ఉంటుంది. ఈ వివరాలను పటం 3.13 లో గుర్తించగలం.

పటం 3.13 ఏకస్వామ్యంలో సగటు, ఉపాంత రాబడి రేఖలు

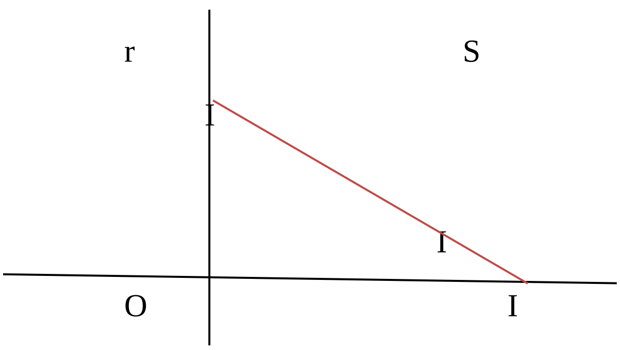


ఇలాగె స్థూల అర్థశాస్త్రంలో పొదుపు, పెట్టుబడి రేఖలు కూడా సరళ రేఖ ఆకారం కలిగివుంటాయనే ప్రమేయం చేయబడుతుంది.

పటం 3.14 పొదుపు రేఖ



పటం 3.15 పెట్టుబడి రేఖ



పటం 3.14, పటం 3.15లలో కనపరచినట్లు, పొదుపు రేఖ ధనాత్మక వాలు కలిగిఉండగా, పెట్టుబడి రేఖ రుణాత్మక వాలు కలిగి ఉంటుంది.

3.6 సారాంశం:

ఈ పాఠంలో సరళ రేఖ గణిత భావనలను, గూర్చి, గణిత గుణాలను గూర్చి విపులంగా తెలుసుకున్నాం. ముఖ్యంగా అంతర ఖండం, వాలు అనే భావనలను అద్యయనం చెచాం. రేఖా చిత్రాలు ద్వారా ఈ భావనలను గూర్చి వివరంగా తెలుసుకున్నాం. ఇవ్వబడిన బిందువుల ద్వారా సరళ రేఖను ఎలా గీయాలని కూడా నేర్చుకున్నాం. అర్థశాస్త్రంలో సరళరేఖలు అనేక అనువర్తనాలను కలిగివున్నాయి. వీటిలో ముఖ్యమైనవి, డిమాండ్ రేఖ, సప్లై రేఖ, వినియోగ రేఖ, పొదుపు రేఖ, పెట్టుబడి రేఖ మొదలైనవి. వీటిని రేఖా చిత్రాలు ద్వారా మనం ఉదహరించాం.

3.7 పదకోశం

1. Straight line	: సరళ రేఖ
2. Intercept	: అంతర ఖండం
3. Slope	: వాలు
4. Horizontal axis	: క్షితిజ అక్షం
5. Vertical axis	: ఊర్ధ్వ అక్షం
6. Demand curve	: డిమాండ్ రేఖ
7. Supply curve	: సప్లై రేఖ
8. Consumption curve	: వినియోగ రేఖ
9. Savings Curve	: పొదుపు రేఖ
10. Investment curve	: పెట్టుబడి రేఖ
11. Average Revenue Curve	: సగటు రాబడి రేఖ
12. Marginal Revenue Curve	: ఉపాంత రాబడి రేఖ

3.8 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

3.8.1 లఘు సమాధాన ప్రశ్నలు

1. సరళ రేఖ సమీకరణం నిర్వచించండి.
2. అంతర ఖండం, వాలు అనే భావనలను నిర్వచనం చేయండి.
3. సంపూర్ణమైనపోటి మార్కెట్లో సగటు రాబడి రేఖ, ఉపాంత రాబడి రేఖ ఆకారాలను వివరించండి.
4. సగటు, ఉపాంత ప్రవృత్తి ప్రమేయాలను రేఖా చిత్రం ద్వార వివరించండి.

3.8.2 వ్యాసం రక సమాధాన ప్రశ్నలు

1. అంతర ఖండం, వాలు అనే భావనలను రేఖా చిత్రం ద్వార వివరించండి.
2. (1,4), (3,1) బిందువుల ద్వారా పయనించు సరళ రేఖ సమీకరణాని ఉత్పన్నం చేయండి:
3. $Q_d = a-bP$, $Q_s = -c+dP$, $Q_d = Q_s$, అనే పాక్షిక మార్కెట్ నమూనాను సాధించి, సమతౌల్య, ధర, వస్తు పరిమాణాలు కనుగొనండి.

4. కింది సరళ సాధారణ సమతౌల్య మార్కెట్ నమూనాను మాత్రికా సిద్ధాంతం వినియోకించి సమతౌల్య, ధర, వస్తు పరిమాణాలు కనుగొనండి.

$$Q_{d1}-Q_{s1} = 0$$

$$Q_{d1} = a_0+a_1P_1+a_2P_2$$

$$Q_{s1} = b_0+b_1P_1+b_2P_2$$

$$Q_{d2}-Q_{s2} = 0$$

$$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$

$$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

3.9 సూచించబడిన పఠనం

1. Alpha Chiang (2017), ***Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4th Edition, New Delhi: McGraw Hills.***

2. R. G. D. Allen, (2014), ***Mathematical Analysis for Economists***, New Delhi: **Trinity Press.**

3. B.C. Mehta and G.M.K. Madnani, ***Mathematics for Economists***, New Delhi: Sultan Chand & Sons.

*****

పాఠం - 4 అవకలనం (DIFFERENTIATION)

విషయ క్రమం :

4.0 ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత ఈ క్రింది అంశాలపై మనకు అవగాహన ఏర్పడుతుంది.

అవకలనం - నిర్వచనం

అవకలనంలోని రకాల సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో అవకలంను ఉపయోగించటం

4.1 అవకలనం - నిర్వచనం :

అర్థశాస్త్రంలో మనము వివిధ ఆర్థిక చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను అధ్యయనం చేస్తూ ఉంటాం. దాహరణకు ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండుకు (Demand) దాని ధరకు (price) గల సంబంధము మనము సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రములో అధ్యయనం చేస్తూ ంటాము. దానిని డిమాండ్ ప్రమేయము అంటారు.

ఈ ప్రమేయాలలో ఒక చలరాశిని స్వతంత్ర చలరాశియని (independent variable) మరొక దానిని పరితంత్ర చలరాశియని (dependent variable) పేర్కొనటం రివాజు. ఉదాహరణకు డిమాండు ప్రమేయంలో y ని ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండు పరిమాణంగాను, x ని ఆ వస్తువు యొక్క ధరగాను భావిస్తే $y = f(x)$ అనే సమీకరణం ద్వారా డిమాండు ప్రమేయాన్ని సూచించవచ్చు. ఇందులో x స్వతంత్ర చలరాశిలో మార్పు జరిగితే, y పరితంత్ర చలరాశిలో కూడా మార్పులు జరగడము సహజము. ఈ మార్పులలో

వచ్చే గతిరీతులను అవకలనం ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

$y = f(x)$ అనే ప్రమేయం, ఒక నిర్ణీత అవధులలో అవిచ్ఛిన్నమయి, x లో Δx అనే మార్పు జరిగితే, దాని వలన y లో Δy అనే మార్పు జరిగితే క్రింద చూపిన విధంగా అవధిని గనుక కనుగొనగల్గినట్లు అయితే, ఆ అవధిని అవకలని (derivative) అని అంటారు.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ఈ అవకలనాన్ని కొంతమంది అవకలన గుణకము (differential coefficent) అని కూడా అంటారు. దీనిని $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ అని గాని వ్రాస్తారు.

కొన్ని ముఖ్య అవకలనలు :

1. $y = x^n$ అయితే $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$

2. $y = e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = e^x$

3. $y = \log x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

4. $y = a^x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = a^x \log x$

5. $y = c$ స్థిర సంఖ్య అయితే $\frac{dy}{dx} = 0$

ఇచ్చిన ప్రమేయములు ఏకఘాత ప్రమేయములు అయినపుడు అవకలన సూత్రములు.

1. $y = (a+bx)^n$ యాత ప్రమేయం / బహుపది ప్రమేయం అయితే $y = (a+bx)^n = n(a+bx)^{n-1} b$

2. $y = a^{A+bx}$ సాధారణ ఘాతాంక ఫంక్షన్ అయినట్లయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a^{A+bx}\right) = a^{A+bx} \cdot \log_a(b)$

3. $y = e^{a+bx}$ ఖచ్చిత ఘాతంక ప్రమేయం అయినట్లయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{a+bx}\right) = e^{a+bx} \cdot b$

4. $y = \log_e(a+bx)$ సంవర్గమాన ప్రమేయం అయినట్లయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\log_e(a+bx)\right) = \frac{1}{a+bx} \cdot b$

4.2 అవకలన సిద్ధాంతాలు :

అవకలన సిద్ధాంతాలు నేర్చుకునే ముందు ఒక ప్రమేయానికి ముంద స్థిర గణకముండే అవకలనాన్ని కనుగొనటం ఏలా అన్నది నేర్చుకుందాం. $y = c \cdot f(x)$ అనే రూపంలో ప్రమేయముండీ c అన్నది స్థిరరాశి, f(x) అనేది ప్రమేయము.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = c \cdot \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

$$= c \cdot f'(x)$$

అందచేత ఒక ప్రమేయానికి స్థిరగుణకము ఉన్నప్పుడు, దానిని బయటకు తీసేసి, ఆ మిగిలిన ప్రమేయానికి అవకలనిని కనుగుంటే సరిపోతుంది.

ఉదాహరణ : $y = f(x) = 5x^5$

4.2.1 మొత్తం నియమం (Sum rule) : రెండు గాని అంతకంటే ఎక్కువ గాని ప్రమేయాల మొత్తం అవకలని, ఆయా వేర్వేరు ప్రమేయాల అవకలనిల మొత్తానికి సమానం.

y = u + v + w అనుకుందాం.

అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \frac{d}{dx}(w)$

అలానే y = u + v - w అయితే

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) - \frac{d}{dx}(w)$$

ఉదాహరణ : క్రింది ప్రమేయాలకు అవకలనిలు కనుగొనండి.

1. $y = x^3 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^4\right)$$

$$= 3 \cdot x^{3-1} + 4 \cdot x^{4-1}$$

$$= 3x^2 + 4x^3$$

2. $y = \frac{5}{4}x^3 - \frac{6}{7}x^5 + 3x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{4}\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{6}{7}\frac{d}{dx}\left(x^5\right) + 3 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)$$

$$=\frac{5}{4}3x^{3-1}-\frac{6}{7}5\cdot x^{4-1}+3\cdot -2x^{-2-1}$$

$$=\frac{5}{4}3x^{2}-\frac{6}{7}5\cdot x^{3}-6x^{-3}$$

$$=\frac{15}{4}x^{2}-\frac{30}{7}\cdot x^{3}-6x^{-3}$$

3. $y=\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^{1/2}$ ఈ ప్రమేయమునకు అవకలనం చేయండి.

ఈ ప్రమేయం $(ax+b)^{n}$ రూపంలో ఉంది కాబట్టి

$$y=(ax+b)^{n}=n\cdot(ax+b)^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{2}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^{\frac{1-2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

4. $y=4+\frac{3}{x}-4\sqrt{2x-7}+4\left(\sqrt{2}x-1\right)^{3/2}$

పై సమీకరణమును క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$y=4+3x^{-1}-5(2x-7)^{1/2}+4\left(\sqrt{2}x-1\right)^{3/2}$$

పై సమీకరణమును x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[4+3x^{-1}-5(2x-7)^{1/2}+4\left(\sqrt{2}x-1\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(4) + 3\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) - 5\frac{d}{dx}(2x-7)^{1/2} + 4\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}-1\right)^{3/2}$$

$$= 0 + 3\cdot -1x^{-1-1} - 5\left[\frac{1}{2}(2x-7)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\right]^{-1} + 4^{2}\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{2x}-1\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot\sqrt{2}\right]$$

$$= 0 - 3x^{-2} - 5\left[\frac{2}{2}(2x-7)^{-\frac{1}{2}}\right] + 6\sqrt{2}\left(\sqrt{2x}-1\right)^{1/2}$$

$$= -3x^{-2} - 5(2x-7)^{-\frac{1}{2}} + 6\sqrt{2}\left(\sqrt{2x}-1\right)^{1/2}$$

5. $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

పై ప్రమేయమును క్రింది విధముఇగా వ్రాయవచ్చును.

$$y = (2x+1)^{\frac{1}{2}} = (2x-1)^{\frac{1}{4}} + (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

పై ప్రమేయమును x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x-1)^{\frac{1}{4}} + (1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}[2x+1]^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2 - \frac{1}{4}(2x-1)^{\frac{1}{4}-1}\cdot 2 + \frac{-1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}-1}(-2)$$

$$= \frac{2}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{3}{4}} + (1-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{2}(2x+1)^{\frac{1-2}{2}} - \frac{2}{4}(2x-1)^{\frac{1-4}{4}} + \frac{-2}{-2}(1-2x)^{\frac{-1-2}{2}}$$

$$= (2x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{-3}{4}} + (1-2x)^{\frac{-3}{2}}$$

అభ్యాసం : ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు $\frac{dy}{dx}$ లను కనక్కోండి.

1. $y = 4x^2 + x + 8$

2. $y = 2x^2 + 3x^4$

3. $y = \frac{1}{x^6}$

4. $y = x + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^y} + 5^x$

5. $y = e^x + x^3 - x^{-5} + 4^x$

జవాబులు :

1. $8x + 1$

2. $4x + 12x^3$

3. $-\frac{6}{x^7}$

4. $1 - \frac{4}{x^2} - \frac{14}{x^8} + 57\log 5$

5. $e^x + 3x^2 + 5x^{-6} + 4^x \log 4$

4.2.2 లబ్దపు నియమం (Product rule) : y=u, v లో u, v లు x లో ప్రమేయాలనుకుందాం. అప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

అలానే $y = u, v, w$ అయితే

$$\frac{dy}{dx} = uv \cdot \frac{d}{dx}(w) + u\,v\frac{d}{dx}(v) + v\,w\frac{d}{dx}(u)$$

ఉదాహరణ :

(1) $y = 5x^2(1-3x)$

$\therefore$ ఇచ్చిన ప్రమేయం u, v రూపంలో ఉన్నది కాబట్టి లబ్ద నియమము

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left[5x^2(1-3x)\right]$$

$$= 5x^2 \cdot \frac{d}{dx}(1-3x) + (1-3x)\frac{d}{dx}(5x^2)$$

$$= 5x^2 \cdot \left[\frac{d}{dx}(1) - 3\frac{d}{dx}(x)\right] + (1-3x)5\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 5x^2[0-30] + (1-3x)\ 5\cdot 2x^{2-1}$$

$$\text{where } \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$= 5x^2(-3) + (1-3x)10^x$$

$$= -15x^2 + 10x - 30x^2$$

$$= 10x - 45x^2$$

(2) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right] + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

ఇక్కడ $\frac{1}{x}$ ను x^{-1} గాను, $\sqrt{x}$ ను $x^{1/2}$ గాను $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ను $x^{-1/2}$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right)\right] + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)\right]$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{-1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}\right] + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + -1\ x^{-1-1}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1-2}{2}} - \frac{-1}{2}\ x^{\frac{-1-2}{2}}\right) + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - x^{-2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\right] + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - x^{-2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{23\sqrt{x}}\right]+\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=(x^2+1)(2x+3)+(x^2+3x)(2x)$$

$$=2x^3+3x^2+2x+3+2x^3+5x^2$$

$$=4x^3+7x^2+2x+3$$

(3) $y=\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

$y=(u.v)$ అయిన $\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)\right]$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\frac{d}{dx}\left(8x^3+3x^2\right)+\left(8x^3+3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+2x\right)$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\left[8\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]+\left(8x^3+3x^2\right)\left[4\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+2\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\left[8\cdot 3x^2+3\cdot 2x\right]+\left(8x^3+3x^2\right)(4\cdot\ 2x+2)$$

$$=\left(4x^2+2x\right)\left(24x^2+6x\right)+\left(8^3+3x^2\right)(8x+2)$$

$$=\left[96x^4+24x^3+48x^3+12x^2\right]+\left[64x^4+16x^3+24x^3+6x^2\right]$$

$$=96x^4+24x^3+48x^3+12x^2+64x^4+16x^3+24x^3+6x^2$$

$$=160x^4+112x^3+18x^2$$

అభ్యాసం : ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు $\frac{dy}{dx}$ లను కనగొనండి.

1. $y=\left(x^2+3\right)\left(2x^2+7\right)$
2. $y=(7x-8)^4\ (5x-1)^3$
3. $y=x^5\left(2x^2+1\right)$
4. $y=\left(x^5+x^2\right)\left(x^3+x\right)$

5. $\left(3x^2-5\right)\left(3-5x^3\right)$

జవాబులు :

1. $2x\left[4x^2+13\right]$
2. $(7x-8)^3(5x-1)^2[245x-148]$
3. $4x^2\left(x^4+2x^2+1\right)$
4. $\left(x^5+x^2\right)\left(3x^2+1\right)+\left(x^3+x\right)\left(5x^4+2x\right)$
5. $3x\left(6+25x-25x^3\right)$

4.2.3 విభక్త నియమం (Quotient rule) :

$y=\frac{u}{v}$ లో u, v లు x లో ప్రమేయాలనుకుందాం. అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=\frac{v\cdot\frac{d}{dx}(u)-u\cdot\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

ఉదాహరణ :

(1) $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ ఇది $y=\frac{u}{v}$ అనే రూపంలో ఉంది. అందుచేత $\frac{dy}{dx}=\frac{v\cdot\frac{d}{dx}(u)-u\cdot\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

$$y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x^2+2}\right]$$

$$=\frac{\left(x^2+2\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)\right]}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+2\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}x^{(1)}\right]-\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-1\frac{d}{dx}(2)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+2\right)\left(2\cdot x^{2-1}+0\right)-\left(x^2+1\right)\left[2x^{2-1}+0\right]}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+2\right)2x - \left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$= \frac{2x^3+4x-\left(2x^3+2x\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$= \frac{2x^3+4x-2x^3-2x}{\left(x^2+x\right)^2} \quad = \frac{4x-2x}{\left(x^2+2\right)^2} \quad = \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

(2) $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ లకు $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనండి.

$y = \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-2x}}$ ఇది $y = \frac{u}{v}$ అని రూపంలో ఉంది కాబట్టి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-2x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+2x}\right) - \sqrt{1+2x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{1-2x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x}\,\frac{d}{dx}(1+2x)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{1+2x}\,\frac{d}{dx}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-2x)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x}\left[\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2 - \sqrt{1+2x}\left[\frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2\right]\right]}{(1-2x)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}(1+2x)^{\frac{1}{2}-2} - \sqrt{1+2x}\left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}(1-2x)^{\frac{1-2}{2}}\right)}{(1-2x)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x}\,(1+2x)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+2x}\,(1-2x)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2x)}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{1-2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right) + \sqrt{1+2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)\right]}{1-2x}$$

$$= \frac{\frac{(1-2x)+(1+2x)}{\sqrt{1+2x}\,\sqrt{1-2x}}}{(1-2x)}$$

$$= \frac{1-\cancel{2x}+1+\cancel{2x}}{\sqrt{1+2x}\,\sqrt{1-2x}\,(1-2x)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x}\,(1-2x)^{\frac{3}{2}}}$$

అభ్యాసం : క్రింది ప్రమేయాలను $\frac{dy}{dx}$ **లను కనుగొనండి.**

1. $y = \frac{a-x}{a+x}$ **2.** $y = \frac{x^3}{1+x^2}$ **3.** $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **4.** $y = \frac{(x+1)(2x-1)}{x-3}$ **5.** $y = \frac{3x+2}{4x^2+3}$

జవాబులు :

1. $\frac{2a}{(a+x)^2}$ **2.** $\frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ **4.** $\frac{2(x^2-6x+1)}{(x-3)^2}$ **5.** $\frac{-(12x^2+16x-9)}{(4x^2+3)^2}$

4.2.4 గొలుసు నియమం (Chain Rule) : y అనే చలరాశి u లో ప్రమేయమయి, u, xలో ప్రమేయమయితే y=f(u), u = $\phi(x)$ అయితే అది ప్రమేయములో ప్రమేయమవుతుంది.

అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ :

(1) $y = t^2 - 3t + 2,\ t = x^2 - 5$ అయితే $\frac{dy}{dt}$ ను కనుగొనండి.

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 3t + 2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(t^2\right) - 3\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(2)$$

$$= 2t - 3 + 0$$

$$= 2t - 3$$

$$t = x^2 - 5$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 5\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2\right) - \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 2x - 0 = 2x$$

(2) $y = z^2 + 1,\ z = t^2 + 1,\ t = x^2 + 1$ కు గొలుసు నియమం ద్వారా $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$$y = z^2 + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}\left(z^2 + 1\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(z^2\right) + \frac{d}{dz}(1)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(z^2\right) + \frac{d}{dz}(1)$$

$$= 2z + 0 = 2z$$

$$z = t^2 + 1$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dz}\left(t^2 + 1\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(t^2\right) + \frac{d}{dz}(1)$$

$$= 2t + 0 = 2t$$

$$= x^2 + 1$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(1)$$

$$=2x\cdot 0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=2z\cdot 2t\cdot 2x$$

$$=8ztx$$

$$=8\left(t^2+1\right)\left(x^2+1\right)x$$

$$=8\left[\left(\left(x^2+1\right)^2+1\right)\left(x^0+1\right)x\right]\ \left(\because t=x^2+1\right)$$

$$=8\left[\left(x^4+2x^2+1\right)+1\left(x^2+1\right)x\right]$$

$$=8x\left[x^{-4}+2x^2+2\right]\left[x^2+1\right]$$

అభ్యాసం : ఈ క్రింది ప్రమేయాలను $\frac{dy}{dx}$ లను కనుగొనండి.

1. $y=\left(x^2+2x+3\right)^5$ 2. $y=e^{2x+5}$ 3. $y=\sqrt{3x-4}$ 4. $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-2x}}$

జవాబులు :

1. $10\left(x^2+2x+3\right)^4(x+1)$ 2. $2\cdot e^{2x+5}$ 3. $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x-4}}$

4. $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}\,(1-2x)^3}$

3.2.5 సంవర్గమాన అవకలనం : ఏదైనా ఒక ప్రమేయము y=f(x) అనే రూపంలో ఉంటే, సంవర్గమాన అవకలనం ద్వారా $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనవచ్చును. పైన ఉదహరించిన ప్రమేయానికి కిరువైపులా (సహజ) సంవర్గమానాలు తీసుకుంటే

$\log y = \phi(x)\cdot \log f(x)$ ఎడమ వైపునున్న y, x లో ప్రమేయము కాబట్టి, log y యొక్క అవకలని $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ (ఎంచేతనంటే, అవకలని $\frac{1}{y}$ కాబట్టి, y, x లో ప్రమేయము కాబట్టి గొలుసు నియమము ప్రకారము y యొక్క అవకలని $\frac{dy}{dx}$) కుడి వైపునున్న ప్రమేయాన్ని, లబ్దపు అవకలనం ద్వారా అవకలనిని కనుగొనవలెను.

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \phi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x) + \log f(x)\phi'(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f(x)^{\phi(x)}\left[\phi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} + \log f(x)\cdot\phi'(x)\right]$$

ఉదాహరణ :

(1) $y = x^{2x+3}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

ఈ ప్రమేయానికి రెండు వైపులా సంవర్గమానాలు తీసుకుంటే

$$\log y = \log_x^{2x+3} = (2x+3)\cdot\log x \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (2x+3).\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\cdot\frac{d}{dx}(2x+3)$$

$$= 2x+3\cdot\frac{1}{x}\log x\cdot 2$$

$$= \frac{2x+3}{x} + 2\cdot\log x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x+3}{x} + 2\log x\right) = x^{2x+3}\left(\frac{2x+3}{x} + 2\cdot\log x\right)$$

(2) $y = \left(x^x\right)^x$ కు $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనండి.

$$y = \left(x^x\right)^x = \left(x^{x^2}\right) \qquad \left(\because \left(a^m\right)^n = a^{mn}\right)$$

పై ప్రమేయమునకు ఇరువైపులా సంవర్గమానమును తీసుకోగా

$$\log y = \log\left(x^{x^2}\right)$$

$$\log y = x^2 \log x$$

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \log x\right) \qquad \left(\because u = x^2, v = \log x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ x^2 \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 2x^{2-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\left(1 + \log x \cdot 2\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left(1 + 2\log x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x\left(1 + 2\log x\right)$$

$$= x^{x^2} \cdot x\left(1 + 2\log x\right)$$

$$= x^{x^{2-1}}\left(1 + 2\log x\right)$$

అభ్యాసము :

(1) $\left(2x^2 + 3x\right)^{4x+5}$ (2) x^x (3) $(4x+5)^{(2x+5)}$ (4) $\left(3x^2+4\right)^{(3x+2)}$ (5) x^{x^x}

జవాబులు :

(1) $\left(2x^2 + 3x\right)^{4x+5}\left[\frac{(4x+5)(4x+3)}{2x^2+3x} + 4\log\left(2x^2+3x\right)\right]$ 2. $x^x\left(1 + \log x\right)$

(3) $(4x+5)^{2x+5}\left(\frac{8x+20}{4x+5} + 2\log(4x+5)\right)$

4. $\left(3x^2+4\right)^{3x+2}\left(\frac{18x^2+12x}{3x^2+4} + 3\log\left(3x^2+4\right)\right)$

5. $x^{x^x} \cdot x^x \log x\left[1 + \log x + \frac{1}{x \cdot \log x}\right]$

ఉదాహరణలు :

1. $7x^3+5x^5-3x^6+8$ అను ప్రమేయము యొక్క అవకలనము కనుగొనుము.

$y=7x^3+5x^5-3x^6+8$ అనుకొనుము.

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(7x^3+5x^5-3x^6+8\right)$ అనుకొనుము.

$=7\cdot 3x^2+5\cdot 5x^4-3\cdot 6x^5+0$

$=21x^2+25x^4-18x^5$

2. $y=\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)$ అవకలనము కనుగొనుము.

$v=\frac{u}{v}$ అయిన $\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(4x^2+2x\right)\left(8x^3+3x^2\right)\right]$

$=4x^2+2x\frac{d}{dx}\left(8x^3+3x^2\right)+\left(8x^3+3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+2x\right)$

$=4x^2+2x\left[8\cdot 3x^2+3\cdot 2x\right]+\left[8x^3+3x^2\right]\left[4\cdot 2x+2\right]$

$=\left(4x^2+2x\right)\left(24x^2+6x\right)+\left(8x^3+3x^2\right)\left(8x+2\right)$

$=96x^4+24x^3+48x^3+12x^2+64x^4+16x^3+24x^3+6x^2$

$=160x^4+112x^3+18x^2$

3. $y=\frac{8x^8+6x^2-2x}{3x^2+5x}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{8x^8+6x^2-2x}{3x^2+5x}\right)$

$$=\frac{\left(3x^2+5x\right)\frac{d}{dx}\left(8x^8+6x^2-2x\right)-\left(8x^8+6x^2-2x\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2+5x\right)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(3x^2+5x\right)\cdot\left(64x^7+12x-2\right)-\left(8x^8+6x^2-2x\right)\left(6x+5\right)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$=\frac{192x^9+36x^3-6x^2+320x^8+60x^2-10x-\left(48x^9+40x^8+36x^3+60x^2-12x^2-10x\right)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$=\frac{192x^9+36x^3-6x^2+320x^8+60x^2-10x-\left(48x^9+40x^8+36x^3+60x^2-12x^2-10x\right)}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

$$=\frac{144x^9+280x^8+6x^2}{\left(3x^2+5x\right)^2}$$

4. $y=\left(3+2x^2\right)^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3+2x^2\right)^3=3\left(3+2x\right)^2\frac{d}{dx}\left(3+2x^2\right)=3\left(3+2x\right)^2\cdot 0+4x=12x\left(3+2x\right)^2$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{8x^3+5x}}=\frac{1}{\left(8x^3+5x\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(8x^3+5x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(8x^3+5x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(8\cdot 3x^2+5\right)=-\frac{1}{2}\left(8x^3+5x\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(24x^2+5\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(8x^3+5x\right)^{\frac{3}{2}}}\left(24x^2+5\right) = -\frac{24x^2+5}{2\left(8x^3+5x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5. $\dfrac{2x^3-x^2+x^{-2}}{x^2}$ యొక్క అవకలన గుణకము కనుగొనుము.

$$y = \frac{2x^3-x^2+x^{-2}}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2} = 2x-1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$= 2x-1+x^{-1}-2\cdot x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x-1+x^{-1}-2x^{-2}\right)$$

$$= 2(1)-0+-1x^{-1}\cdot 2-2x^{-2-1}$$

$$= 2-x^{-2}-4\cdot x^{-3}$$

$$= 2\cdot-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$$

6. $y = \left(x^3+3\right)\left(2x^2+7\right)^3$ యొక్క $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$$y = \left(x^3+3\right)\left(2x^2+y\right)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^3+3\right)\left(2x^2+y\right)^3\right] \qquad \frac{d}{dx}(u,v) = u\cdot\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

$$= \left(x^3+3\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2+y\right)^3+\left(2x^2+y\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3+3\right)$$

$$= \left(x^3+3\right)3\left(2x^2+y\right)^3+\frac{dy}{dx}\left(2x^2+y\right)^3+\left(2x^2+y\right)^3\left(3x^2\right)$$

$$= 3\left(x^2+3\right)\left(2x^2+y\right)\cdot 2.2x+\left(2x^2+y\right)\cdot 2.2x+\left(2x^2+y\right)^3\cdot 3x^2$$

$$= 12x\left(x^3+3\right)\left(2x^2+y\right)+\left(2x^2+y\right)^3\cdot 3x^2$$

4.4 చదవవలసిన పుస్తకాలు :

1. A.C. Chiang - Fundamental Methods Mathematical Economics, Mc Graw Hill, Second Edition
2. Allen, R.G.D. - Mathematical Analysis for Economics, Mac Millons & Co.Ltd.,
3. Yanane. T. - Mathematics for Economics, Printice Hall Inc.
4. Baswant Kandoi - Mathematics for Business and Economics with Applications.

4.5 మాదిరి పరిక్షా ప్రశ్నలు :

1. ఒక ప్రమేయాన్నుంచి మార్పుల రేటు కనుగొనడమిలా?
2. సంవర్గమాన ప్రమేయమంటే ఏమిటి? దాని అవకలనాన్ని ఎలా కనుగొంటారు.
3. పారంపర్య అవకలనాన్ని ఎలా కనుగొంటారు.

యూనిట్ -

పాఠం -5

అవకలన ఆర్థికానువర్తాలు

విషయ క్రమం :

5.0 ఉద్దేశ్యము :

ముందు పాఠం నందు అవకలనం, అవకలనంలోని రకాలను అధ్యయనం చేయడం జరిగింది. ఈ పాఠం నందు అవకలనంలోని రకాలను సూక్ష్మఅర్థశాస్త్రంలో వ్యయము సగటు మరియు పాంత వ్యయంలను మరియు రాబడిని సగటు ఉపాంత రాబడులను అధ్యయనం చేయడం జరిగింది.

అవకలని ఆర్థికానువర్తాలు (Econoic Applications of Derivatives) :

అవకలని ఆర్థిక శాస్త్రానికి అనువర్తింపచేయుటము ద్వారా ఈ క్రింది అంశాలను మనము అధ్యయనం చేయవచ్చును. అవి

1. మార్పులోని రేటును కనుగొనడం (rate of change)

2. ఉపాంత విలువను కనుగొనడం (marginal values)

5.1 మార్పులోని రేటు కనుగొనుట :

ఒక ఉదాహరణ ద్వారా మార్పులోని రేటును కనుగొందాము. $y=f(x)$లో x అన్నది ఉత్పత్తి పరిమాణము, y అన్నది మొత్తము వ్యయము.

ఉత్పత్తి Δx అనే మార్పు జరిగితే Δy వ్యయంలో అనే మార్పు జరిగిందనుకుందాము. జరిగిన మార్పు రేటును $\frac{dy}{dx}$ ద్వారా కనుగొనవచ్చును. అందుచేత $\frac{dy}{dx}$ మార్పులోని రేటు తెలియజేయుటమే కాక x లో అతి తక్కువ మార్పు జరిగినట్లయిన y

లో వచ్చిన మార్పును తెలియజేస్తుంది.

ఉదా : $y=3x+4$ అనే ప్రమేయంలో $\frac{dy}{dx}=3$ (ఇదే మార్పు రేటుని తెలియజేస్తుంది.) దీని అర్థమేమంటే ఉత్పత్తి పరిమాణంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినట్లయితే, మొత్తము వ్యయంలో 3 యూనిట్ల మార్పు వస్తుందన్నమాట.

5.2 ఉపాంత విలువలను కనుగొనటం :

సూక్ష్మ అర్థశాస్త్రంలో ఉపాంత ప్రయోజనము, ఉపాంత రాబడి, ఉపాంత వ్యయము, ఉపాంత ఉత్పాదకత యొక్క ప్రాముఖ్యత తెలుసుకున్నాము. అవకలనము ద్వారా ఉపాంత వ్యయము, ఉపాంత రాబడి కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు మొత్తం వ్యయం తెలిసినపుడు ఉపాంత వ్యయం మనం అవకలనం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

5.3 వ్యయ భావనలు :

మొత్తం వ్యయం: ఒక వస్తువును ఉత్పత్తి చేయడానికి చేసిన వ్యయం. ఈ వ్యయంలో స్థిర మరియు చర వ్యయం కలసి ఉంటుంది.

మొత్తం వ్యయం (TC) = స్థిర వ్యయం(TFC) + చర వ్యయం (TVC)

5.3.1 సగటు వ్యయము (AC) = మొత్తము వ్యయమును సంబంధిత ఉత్పత్తి యూనిట్లతో భాగించాలి.

$$AC=\frac{TC}{Q}$$

5.3.2 ఉపాంత వ్యయము (MC) = ఒక యూనిట్ ఉత్పత్తిని అదనంగా చేసినపుడు మొత్తం వ్యయంలో ఏర్పడిన పెరుగుదల ఉపాంత వ్యయం.

ఉపాంత వ్యయం (MC) $MC=\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$ = మొత్తం ఉత్పత్తిలో మార్పు / వస్తు పరిమాణంలో మార్పు

$$MC=TC_{n+1}-TC_n$$

ఉదాహరణలు :

1. $AC=2x+5$ సగటు వ్యయం అయిన ఉపాంత వ్యయం కనుగొనుము.

మొత్తము వ్యయం = మొత్తం ఉత్పత్తి × సగటు వ్యయం i.e., $x\times AC$

$$=x\times(2x+5)$$

$$c=2x^2+5x$$

ఉపాంత వ్యయం $=\frac{d}{dx}(c)=2.2x+5$

$$=4x+5$$

2) వ్యయ ప్రమేయము $c = 100 - 200x + x^2$ కు సగటు మరియు ఉపాంత వ్యయంను కనుగొనుము.

$$c = 100 - 200x + x^2$$

సగటు వ్యయం (AC) = మొత్తం వ్యయం / వస్తు పరిమాణం = $\frac{TC}{x}$

$$AC = \frac{100 - 200x + x^2}{x}$$

$$= \frac{100}{x} - \frac{200x}{x} + \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{100}{x} - 200 + x$$

ఉపాంత వ్యయం (MC) = $\frac{d}{dx}(TC)$

$$MC = \frac{d}{dx}\left[100 - 200x + x^2\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(100) - 200\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(100) - 200\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= 0 - 200 + 2 \cdot x$$

$$= -200 + 2x$$

3) ఒక వస్తువు యొక్క మొత్తం చర వయయం $Cv = 2x^3 - 60x^2 + 100x$ ఆ వస్తువు యొక్క మొత్తం వ్యయము, సగటు మరియు ఉపాంత వ్యయంను కనుగొనండి?

మొత్తం చర వ్యయము $Cv = 2x^3 - 60x^2 + 100x$

మొత్తం వ్యయం = మొత్తం స్థిర (TFC)+ మొత్తం చరవ్యయం (TVC)

$$TC = 2x^3 - 60x^2 + 100x + k$$

సగటు వ్యయం $(AC) = \frac{TC}{x}$

$$= \frac{2x^3 - 60x^2 + 100x + k}{x}$$

$$= \frac{2x^3}{x} - \frac{60x^2}{x} + \frac{100x}{x} + \frac{k}{x}$$

$$= 2x^2 - 60x + 100 + \frac{k}{x}$$

ఉపాంత వ్యయం $MC = \frac{d}{dx}(TC)$

$$\frac{d}{dx}(TC) = \frac{d}{dx}\left[2x^3 - 60x^2 + 100x + k\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 60\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 100\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(k)$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 60 \cdot 2x + 100 + 0$$

$$= 6x^2 - 120x + 100$$

5.3.3 మొత్తం వ్యయం, సగటు వ్యయం మరియు ఉపాంత వ్యయము మధ్య సంబంధం.

ముందు భాగంలో మొత్తం వ్యయం, సగటు వ్యయం మరియు ఉపాంత వ్యయములను గూర్చి తెలుసుకున్నాము. ఇక్కడ వాటి మధ్య గల సంబంధమును తెలుసుకుందాం.

మొత్తం వ్యయము $(TC) = C = f(q)$

$$AC = \frac{TC}{q} = \frac{C}{q}$$

$$TC = Ac \cdot q$$

$$= \frac{c}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q}$$

$$= c$$

$$MC = M_c = \frac{d}{dq}(c)$$

సగటు రేఖ యొక్క వాలు AC $=\frac{d}{dq}(q)=\frac{d}{dq}\left(\frac{c}{q}\right)$

$$=\frac{q\cdot\frac{d}{dq}(c)-c\frac{d}{dq}(q)}{q^2}$$

$$=\frac{q\cdot\frac{dc}{dq}-c\cdot 1}{q^2}$$

$$=\frac{q\cdot\frac{dc}{dq}-c\cdot 1}{q^2}$$

$$=\frac{q}{q}\left(\frac{dc}{dq}\right)-\frac{c}{q^2}$$

$$=\frac{1}{q}\left(\frac{dc}{dq}\right)-\frac{c}{q^2}$$

$$=\frac{1}{q}\left(\frac{dc}{dq}-\frac{c}{q}\right)$$

$$=\frac{1}{q}[Mc-Ac]$$

సగటు వ్యయం యొక్క వాలు $=\frac{1}{q}(MC-AC)$

సగటు వ్యయంకు మరియు ఉపాంత వ్యయంకు మధ్య గల సంబంధం.

1. సగటు వ్యయరేఖ ఋణాత్మక వాలు కలిగినట్లయితే $AC<0$, ఉపాంత వ్యయరేఖ సగటు వ్యయరేఖ క్రింద ఉంటుంది.

2. సగటు వ్యయరేఖ కనీస బిందువు వద్ద AC=0 ఉపాంత వ్యయరేఖ సగటు వ్యయరేఖ సమానంగా ఉంటాయి.

3. సగటు వ్యయరేఖ యొక్క వాలు ధనాత్మకం అయితే ఉపాంత వ్యయరేఖ సగటు వ్యయరేఖ పైన ఉంటుంది.

ఉదాహరణ :

1) ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయం $TC=0.04x^3-0.9x^2+10x+10$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క సగటు, సగటు చర వ్యయం, ఉపాంత వ్యయం సగటు వ్యయం యొక్క వాలును కనుగొనుము.

$TC = 0.04x^3 - 0.9x^2 + 10x + 10$

సగటు వ్యయం $TC = \frac{TC}{x}$

$$= \frac{0.04x^3 - 0.9x^2 + 10x + 10}{x}$$

$$= \frac{0.04x^3}{x} - \frac{0.9x^2}{x} + \frac{10x}{x} + \frac{10}{x}$$

$$= 0.04x^2 - 0.9x + 10 + \frac{10}{x}$$

సగటు చర వ్యయం = $0.04x^3 - 0.9x^2 + 10x$

ఉపాంత వ్యయం $(MC) = \frac{d}{dx}(TC)$

$$MC = \frac{d}{dx}\left[0.04x^3 - 0.9x^2 + 10x + 10\right]$$

$$= 0.04\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 0.9\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 10\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(10)$$

$$= 0.043x^2 - 0.92x + 10 + 0$$

$$= 0.12x^2 - 1.8x + 10$$

సగటు వ్యయం వాలు $(AC) = \frac{d}{dx}(AC)$

$$= \frac{d}{dx}\left[0.04x^2 - 0.9x + 10 + \frac{10}{x}\right]$$

$$= 0.04\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 0.9\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(10) + 10\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$$

$$= 0.04 \cdot 2x - 0.9 + 0 + 10x^{-1-1}$$

$$= 0.08x - 0.9 + \frac{10}{x^2}$$

సగటు వ్యయం యొక్క వాలు = $\frac{d}{dx}(MC)$

$$= \frac{d}{dx}\left[0.12x^2 - 1.8x + 10\right]$$

$$= 0.12\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 1.8\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(10)$$

$$= 0.12 \cdot 2x - 1.8 + 0$$

$$= 0.24x - 1.8$$

$$\frac{1}{x}[MC - AC] = \frac{1}{x}\left[\left(0.12x^2 - 1.8x + 10\right) - \left[0.04x^2 - 0.9x + 10 + \frac{10}{x}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[0.12x^2 - 1.8x + \cancel{10} - 0.4x^2 + 0.9x - \cancel{10} - \frac{10}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[0.08x^2 - 0.9x - \frac{10}{x}\right]$$

$$= \frac{0.08x^2}{x} - \frac{0.9x}{x} - \frac{10}{x^2}$$

$$= 0.08x - 0.9 - \frac{10}{x^2}$$

2) ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయం $c(x) = 0.005x^3 - 0.7x^2 - 30x + 3000$, x వస్తు పరిమాణం అయితే ఆ సంస్థ యొక్క సగటు మరియు ఉపాంత వ్యయంను కనుగొనండి?

$$c(x) = 0.005x^3 - 0.7x^2 - 30x + 3000$$

సగటు వ్యయం $(AC) = \frac{7c}{x}$

$$= \frac{0.005x^3 - 0.7x^2 - 30x + 3000}{x}$$

$$= \frac{0.005x^3}{x} - \frac{0.7x^2}{x} - \frac{30x}{x} + \frac{3000}{x}$$

$$= 0.005x^2 - 0.7x - 30 + \frac{3000}{x}$$

ఉపాంత వ్యయము $MC = \frac{d}{dx}(c)$

$$MC = \frac{d}{dx}\left[0.005x^3 - 0.7x^2 - 30x + 3000\right]$$

$$= 0.005\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 0.07\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 30\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3000)$$

$$= 0.005 \cdot 3x^2 - 0.07x2x - 30(1) + 0$$

$$MC = 0.015x^2 - 0.14x - 30 \cdot$$

అభ్యాసం :

1. x పరిమాణంలో వస్తువులను ఉత్పత్తి చేసే సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయం $c(x) = 60 - 12x + 2x^2$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క సగటు మరియు ఉపాంత వ్యయంలను కనుగొనండి.

2. x వస్తు పరిమాణంలో ఉత్పత్తి చేసే సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయం $c(x) = 0.5x^2 + 2x + 20$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క సగటు మరియు ఉపాంత వ్యయంను కనుగొనండి.

జవాబులు :

1. $AC = \frac{60}{x} - 12 + 2x,\ MC = -12 + 4x$

2. $AC = 0.5x + 2 + \frac{20}{x},\ MC = x + 2$

5.2 రాబడి విశ్లేషణ

ఉద్దేశ్యం : రాబడి విశ్లేషణలో మొత్తం సగటు, ఉపాంత రాబడులు అనే మూడు భావనలను గుర్తించి వాటి మధ్య గల సంబంధాన్ని ఈ రెండింటికి డిమాండ్ వ్యాకోచత్వంతో గల సంబంధాన్ని కూడా ఈ భాగంలో చర్చిస్తోంది.

పరిచయం : ఒక సంస్థ సమతౌల్య స్థితిని తెలుసుకోడానికి రాబడి రేఖలను తెలుసుకోవాల్సిన అవసరమున్నది. ఒక సంస్థక వచ్చే రాబడి దాని వ్యయంను బట్టి ఆ సంస్థ లాభాలను అంచనా వేయవచ్చు. సంస్థ రాబడిని మూడు రకాలగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. అవి

1. మొత్తం రాబడి
2. సగటు రాబడి
3. ఉపాంత రాబడి

5.2 మొత్తం రాబడి : ఒక సంస్థ మొత్తం రాబడి తెలుసుకోవడానికి ఆ సంస్థ ఉత్పత్తి చేసి వస్తు పరిమాణంను విక్రయించిన ధరతో గుణించాలి.

$R = f(x) = p.x$

p = ధర

x = వస్తు పరిమాణం

5.2.2 సగటు రాబడి :

ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తం రాబడిని విక్రయించిన వస్తుపరిమాణంతో భాగించి సగటు రాబడి లెక్కగట్టవచ్చును. ఒక యూనిట్ వస్తువు ధర సగటు రాబడిని తెలియజేస్తుంది.

$$AC = \frac{\text{మొత్తం రాబడి}}{\text{విక్రయించిన వస్తుపరిమాణం}}$$

$$= \frac{TR}{x} = \frac{P.x}{x} = P$$

సగటు రాబడి వస్తువు ధరకు సమానంగా ఉంటుంది.

5.2.3 ఉపాంత రాబడి :

వస్తువు అదనపు యూనిట్‌ను విక్రయించినందు వల్ల మొత్తం రాబడిలో ఏర్పడిన మార్పును ఉపాంత రాబడి అంటారు.

ఉపాంత రాబడి (MR) = $\frac{\text{మొత్తం రాబడి}}{\text{ఉత్పత్తిలో వచ్చిన మార్పు}}$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(R)$$

ఉదాహరణ :

1) $R = 3x^2 + 4$ మొత్తము రాబడి అయినప్పుడు ఉపాంత రాబడి కనుగొనండి. మొత్తము రాబడి ప్రమేయమును ఉత్పత్తి ద్వారా అవకలనం చేయటము వలన ఉపాంత రాబడి తెలుస్తుంది.

$$\frac{d}{dx}(R) = 3 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 4\frac{d}{dx}(4) = 3.2x + 0 = 6x$$

2) ఒక సంస్థ x వస్తువులను ఉత్పత్తి చేసి విక్రయించగా వచ్చిన రాబడి $R = 100x - 0.5x^2$ అయితే (1) $x = 0$, $x = 10$ మరియు $x=100$ వద్ద ఉపాంత రాబడిని కనుగొనండి.

రాబడి (R) $= 100x - 0.5x^2$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left(100x - 0.5x^2\right)$$

$$= 100\frac{d}{dx}(x) - 0.5\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 100 - x$$

ఉపాంత రాబడి $(MR) = 100 - x$

$x = 0$ వద్ద ఉపాంత రాబడి

$$MR = 100 - 0 = 100$$

$x = 10$ వద్ద ఉపాంత రాబడి = 100-10 = 90

$x = 100$ ఉపాంత రాబడి = 100-100 = 0

3) ఒక x వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తుంది, P ధర ధర ప్రమేయము $P = \frac{100}{x+2} - 3$ అయినట్లయితే ఆ సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి $x = 3$ మరియు $x = 8$ వద్ద కనుగొనండి.

$$p = f(x) = \frac{100}{x+2} - 3$$

$$\therefore TR = p.x$$

$$= \left(\frac{100}{x+2} - 3\right)x$$

$$= \frac{100x}{x+2} - 3x$$

$$MR = \frac{d}{dx}(TR)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{100x}{x+2} - 3x\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{100x}{x+2}\right] - 3\frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{(x+2)\frac{d}{dx}(100x) - 100x\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2} - 3$$

$$= \frac{(x+2)100\frac{d}{dx}(x) - 100x\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)}{(x+2)^2} - 3$$

$$= \frac{(x+2)100 - 100x(1+0)}{(x+2)^2} - 3$$

$$= \frac{(x+2)100 - 100x}{(x+2)^2} - 3$$

$$= 100 \cdot \frac{x+2-x}{(x+2)^2} - 3$$

ఉపాంత రాబడి = $\frac{200}{(x+2)^2} - 3$

$x = 3$ వద్ద ఉపాంత రాబడి

$$MR_3 = \frac{200}{(3+2)^2} - 3$$

$$= \frac{200}{(5)^2} - 3$$

$$= \frac{200}{25} - 3$$

$$= 8 - 3 \quad = 5$$

$x = 3$ వద్ద ఉపాంత రాబడి

$$MR_8 = \frac{200}{(8+2)^2} - 3$$

$$= \frac{200}{(10)^2} - 3$$

$$= \frac{200}{10} = 3$$

$$= 2 - 3 = -1$$

5.6 మాదిరి పరిక్షా ప్రశ్నలు :

1. డిమాండ్ ప్రమేయము $p = 12 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క మొత్తం రాబడి, $x = \frac{3}{4}, x = 1, x = \frac{1}{2}$ వద్ద ఉపాంత రాబడి కనుగొనండి.

2. $TR = 12x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, 12.19, 12, 12.5

5.7 చదవవలసిన పుస్తకాలు :

1. A.C. Chiang - Fundamental Methods Mathematical Economics, Mc Graw Hill, Second Edition
2. Allen, R.G.D. - Mathematical Analysis for Economics, Mac Millons & Co.Ltd.,
3. Yanane. T. - Mathematics for Economics, Printice Hall Inc.
4. Baswant Kandoi - Mathematics for Business and Economics with Applications.

5.8 మాదిరి పరిక్షా ప్రశ్నలు :

1. $\pi = ax^2 + bx + c$ మొత్తం వ్యయ ప్రమేయమయినట్లయితే సగటు, ఉపాంత, వ్యయ ప్రమేయాలను కనుగొనండి.
2. $p = 20 - x$ డిమాండు ప్రమేయము అయితే, మొత్తం ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాలను కనుగొనండి.
3. $c = 4x^2 + 2x$ సగటు వ్యయ ప్రమేయానికి మొత్తం వ్యయ, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాలను కనుగొనుము.
4. $c = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 15Q + 27$ మొత్తం ఖర్చు ప్రమేయం అయిన ఉపాంత ప్రమేయం, సగటు ప్రమేయంలను కనుగొనుము.
5. మొత్తం వ్యయం $c(x) = 0.0005x^3 - 0.7x^2 - 30x + 3000$ అయితే ఆ సంస్థ సగటు వ్యయం, ఉపాంత వ్యయం, సగటు చర వ్యయంను కనుగొనండి.

యూనిట్ -

పాఠం -6 వ్యాకోచత్వ భావనలు

విషయ క్రమం :

6.0 పరిచయం :

స్వతంత్ర చలాంకంలోని మార్పు వలన, ఆధార చలాంకంలో వచ్చే మార్పును కొలవడానికి వ్యాకోచత్వ భావన ఉపయోగపడుతుంది. వ్యాకోచత్వ భావనకు ఆచరణాత్మక ప్రాధాన్యత చాలా ఉన్నది. కాని వాస్తవానికి ఈ భావన వినియోగపు డిమాండ్‌ను విశ్లేషించడంలో ఎంతగానో ఉపయోగిస్తారు.

6.1డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం - అర్థం :

స్వతంత్ర చలాంకంలో వచ్చే నిర్ణీత అనుపాతపు మార్పు వలన ఆధార చలాంకంలో వచ్చే అనుపాతపు మార్పు ఎంత ఉంటుందో తెలియజేసేదే డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం. అనగా స్వతంత్ర చలాంకంలో నిర్ణీత శాతంలో మార్పు వచ్చినపుడు ఆధార చలాంకంలో వచ్చే మార్పు శాతం ఎంత ఉంటుందో డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం తెలియజేస్తుంది. దీనినే ఈ క్రింది రూపంలో చెప్పవచ్చును.

$$\text{ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం (ed)} = \frac{\text{డిమాండ్‌లో వచ్చిన అనుపాతపు మార్పు}}{\text{ధరలో వచ్చిన అనుపాతపు మార్పు}}$$

పై సమీకరణంను మరలా ఈ విధంగా వ్రాయగా

$$ed = \frac{\text{డిమాండ్‌లో వచ్చిన మార్పు / మొదటి డిమాండ్}}{\text{ధరలో వచ్చిన మార్పు / మొదటి ధర}}$$

పై సమీకరణమును గణాంక పద్ధతిలో వ్రాయగా

$$ed = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Δq = డిమాండ్‌లో వచ్చిన మార్పు

Δp = ధరలో వచ్చిన మార్పు

q = మొదటి డిమాండ్

p = మొదటి ధర

$$ed = \frac{\Delta q}{q} \times \frac{p}{\Delta p}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

ధరకు డిమాండ్‌కు మధ్య విలోమానుపాత సంబంధం ఉంటుంది. కాబట్టి $ed = -\frac{p}{q} \times \frac{\Delta q}{\Delta p}$

డిమాండ్ వ్యాకోచత్వ విలువ $(-ve, +ve \text{ or} > 0)$గా ఉంటుంది.

(i) $ed = 0$ అయితే దానిని సంపూర్ణ అవ్యాకోచత్వ డిమాండ్ అంటారు.

(ii) $0 < ed < 1$అయితే దానిని అవ్యాకోచత్వ డిమాండ్ అంటారు.

(iii) $|ed| = 1$ అయితే దానిని ఏకత్వ వ్యాకోచత్వము అంటారు.

(iv) $|ed| > 1$ అయితే దానిని సాపేక్ష వ్యాకోచత్వము అంటారు.

(v) $|ed| > \infty$ అయితే దానిని సంపూర్ణ వ్యాకోచత్వము అంటారు.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది డిమాండ్ ప్రమేయము $q = 100 - 4p - 2p^2$ అయితే ధర $p = 2, p = 5, p = 10$ వద్ద ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వంను కనుగొనండి.

$$q = 100 - 4p - 2p^2$$

పై డిమాండ్ ప్రమేయంను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}\left[100 - 4p - 2p^2\right]$$

$$= \frac{d}{dp}(100) - 4\frac{d}{dp}(p) - 2\frac{d}{dp}\left(p^2\right)$$

$$= 0 - 4(1) - 2 \cdot 2p$$

$$= -4 - 4p$$

ధర డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము $= -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$

ధర వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము

at $p = 2$

$q = 100 - 4(2) - 2(2)^2$

$=100-8-8$

$q = 84$

$\frac{dq}{dp} = -4 - 4(2)$

$= -4 -8$

$= -12$

$ed = -\frac{2}{84} \times -12 \Rightarrow = \frac{24}{8} = \frac{2}{7}$

$= \frac{2}{7} = 0.29$

$\therefore ed = 0.29 < 1$ కాబట్టి డిమాండ్ అవ్యాకోచత్వంగా ఉన్నది అంటే ధరలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినట్లయితే డిమాండ్‌లో **0.29**యూనిట్ మార్పు వస్తుంది.

(ii) ధర **= 5** వద్ద

$q = 100 - 4(5) - 2(5^2)$

$= 100 - 20 - 50$

$= 100 - 70 = 30$

$\frac{dv}{dp} = -4 - 4p$

$= -4 - 4(5)$

$= -4 - 20$

$= -24$

$ed = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$

$$= -\frac{5}{30} \cdot -24$$

$$= \frac{120}{30} = 4$$

$|ed| = 4 > 1$ కాబట్టి డిమాండ్ సాపేక్ష వ్యాకోచత్వం కాబట్టి ధరలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినట్లయితే డిమాండ్‌లో **4** యూనిట్లు లేక **4** రెట్లు మార్పు వస్తుంది.

(iii) ధర(P) వద్ద

$$q = 100 - 4p - 2p^2$$

$$= 100 - 4(10) - 2(10)^2$$

$$= 100 - 40 - 2(100)$$

$$= 100 - 40 - 200$$

$$= 100 - 240$$

$$= -140$$

$$\frac{dx}{dp} = -4 - 4(p)$$

$$= -4 - 4(10)$$

$$= -4 - 40$$

$$= -44$$

$$ed = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

$$= \frac{-10}{-140} \times -44$$

$$= -\frac{440}{140}$$

$$= -\frac{22}{7} = 3.14$$

$|ed| = 3.14 > 1$ కాబట్టి డిమాండ్ సాపేక్ష వ్యాకోచత్వంగా చెప్పవచ్చు. ధరలో ఒక యూనిట్ మార్పు వల్ల డిమాండ్‌లో **3.14** యూనిట్ మార్పు వస్తుంది.

ప్రశ్నలు :

1. డిమాండ్ ప్రమేయం x=40-4p అయితే ధర p=5, 12 ల వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వంను కనుగొనండి.

2. డిమాండ్ ప్రమేయం $q=\frac{20}{\sqrt{p+1}}$ అయితే ధర $p=4, p=8, p=2$ వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వంను కనుగొనండి.

3. డిమాండ్ ప్రమేయం $q=\frac{20}{p+1}$ అయితే ధర $p=3$ వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం కనుగొనండి.

జవాబులు :

1. (i) ed = 1 (ii) ed = 6
2. (i) ed = 0.4 (ii) ed = 0.44 (iii) ed = -1.93
3. ed = 0.75

6.2 సప్లయ్ వ్యాకోచత్వం :

వస్తువు యొక్క సప్లయ్ దాని ధర మీద ఆధారపడి వుంటుంది. ఒక వస్తువు ధరలో వచ్చిన మార్పు వల్ల దాని సప్లయ్‌లో వచ్చిన మార్పును సప్లయ్ వ్యాకోచత్వం అంటారు.

$C_5 =$ ఒక వస్తువు సప్లయ్‌లో వచ్చిన అనుపాతపు మార్పు / ధరలో వచ్చిన అనుపాతపు మార్పు

$$=\frac{P}{x}.\frac{dx}{dp}$$

6.3 ఆదాయ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం :

ఆదాయానికి, వస్తువు డిమాండ్‌కు మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సూచించేదాన్ని ఆదాయ డిమాండ్ అంటారు. ఆదాయంలో వచ్చిన మార్పు వల్ల వస్తు డిమాండ్‌లో వచ్చే మార్పును ఆదాయ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము అంటారు. ఆదాయంలో మార్పు వల్ల వినియోగదారుడు ఏ ఏ వస్తువులను కొనుగోలు చేస్తాడో దీని ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు.

ఆదాయ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం $\left(C_s\right)$ = వస్తువు డిమాండ్‌లో వచ్చిన అనుపాతపు మార్పు / ధరలో వచ్చిన అనుపాత మార్పు

C_s = డిమాండ్‌లో వచ్చిన మార్పు / మొదట డిమాండ్ / ఆదాయంలో వచ్చిన మార్పు / మొదటి ఆదాయం

$$=\frac{\Delta dx}{x}\bigg/\frac{\Delta y}{y}$$

$$=\frac{\Delta dx}{x}\times\frac{y}{\Delta y}$$

$$= \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}$$

గమనిక :

$e_y > 1$ అయితే వినియోగదారుడు విలాస వస్తువులను కొనుగోలు చేస్తాడు.

$0 < e_y < 1$ అయితే వినియోగదారుడు నిత్యావసర వస్తువులను కొనుగోలు చేస్తాడు.

$e_y < 0$ అయితే వినియోగదారుడు నాసిరకం వస్తువులను కొనుగోలు చేస్తాడు.

ఉదాహరణ -1 : క్రింది ప్రమేయాలకు సప్లయ్ వ్యాకోచత్వంను వివిధ ధరల వద్ద కనుగొనుము. సప్లయ్ ప్రమేయం $P = 4 + 5x^2$ (x = వస్తు సప్లయ్)

(a) $p = 9$, (b) $p = 6$, (c) $p = 4$, (d) $p = 3$

$$p = 4 + 5x^2$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(4 + 5x^2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(4) + 5\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= 0 + 5 \cdot 2x$$

$= 10x$ మరియు

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}} = \frac{dx}{dp} = \frac{1}{10x}$$

అయితే $e_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

ఇక్కడ $p = 4 + 5x^2, \frac{dx}{dp} = \frac{1}{10x}$

$$e_s = \frac{4 + 5x^2}{x} \cdot \frac{1}{10x}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{4 + 5x^2}{x^2}\right)$$

ధర (p) = 9 వద్ద సప్లయ్ వ్యాకోచత్వము

ముందు మనం x విలువను కనుగొనాలి.

$$p = 4 + 5x^2$$

$$5x^2 = p - 4$$

$$x^2 = \frac{p - 4}{5} = \frac{1}{5}(p - 4)$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}(p-4)}$$

p విలువను పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}(9-4)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cancel{5}}\cancel{(5)}}$$

$$x = \sqrt{1} = 1$$

x విలువను సప్లయ్ వ్యాకోచత్వం సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$e_s = \frac{1}{10}\left[\frac{4+5(1)^2}{(1)^2}\right] = \frac{1}{10}.\frac{9}{1} = \frac{9}{10} = 0.9 < 1$$

సప్లయ్ వ్యాకోచత్వం ఒకటి కంటే తక్కువ ఉన్నది కాబట్టి ఇది సాపేక్ష వ్యాకోచత్వం. ధరలో ఒక యూనిట్ మార్పు వల్ల దాని వస్తు సప్లయ్‌లో **0.9**యూనిట్‌ల మార్పు వస్తుంది.

(b) p = **6** వద్ద

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}(6-4)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}(2)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{0.40} = 0.63$$

$$e_s = \frac{1}{10}\left[\frac{4+5\left(\sqrt{2}/5\right)^2}{\left(\sqrt{2}/5\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(4+\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\cancel{5}}\right)\frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[6\times\frac{5}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{30}{2} = \frac{15}{10} = 1.5 > 1$$

p = **5** వద్ద సప్లయ్ సాపేక్ష ఎక్కువ వ్యాకోచత్వము. అంటే వస్తు ధర ఒక యూనిట్ మార్పిక, ఆ వస్తు పరిమాణంలో (x)**1.5** యూనిట్ U మార్పు వస్తుంది.

ఉదాహరణ - 2 : ఈ ఆదాయ ప్రమేయము 30x = 10+2y దీని నుండి

ఆదాయ వ్యాకోచత్వంను y=200 మరియు y=100 వద్ద కనుగొనండి.

ఆదాయ ప్రమేయం 30x = 10+2y

$$x = \frac{10}{30} + \frac{2y}{30}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{y}{15}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{15}\right)$$

$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{15}\frac{d}{dy}(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = 0 + \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$$

కాని ఆదాయ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం y దృష్ట్యా చేస్తాము కాబట్టి

$$e_y = \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\frac{1}{3} + \frac{1}{15}y} \cdot \frac{1}{15}$$

$$= \frac{y}{\frac{5+y}{15}} \cdot \frac{1}{15}$$

$$= \frac{y}{5+y} \times \frac{\cancel{15}}{\cancel{15}}$$

$$= \frac{y}{5+y}$$

(a) ఆదాయం y=200 వద్ద ఆదాయ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం

$$e_y = \frac{200}{5+200} = \frac{200}{205} = 0.98 < 1$$

ఆదాయంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వల్ల (=200) డిమాండ్‌లో 0.98% వస్తుంది.

(b) ఆదాయం (y)=100 వద్ద

$$e_y = \frac{100}{5+100} = \frac{100}{105} = 0.99 = 1$$

ఆదాయంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వల్ల (=100) డిమాండ్‌లో 0.99% మార్పు వస్తుంది. ఆదాయంలో మార్పు డిమాండ్‌లో మార్పుకు సమానంగా ఉంటుంది.

అభ్యసనం :

I. ఈ క్రింది సప్లయ్ ప్రమేయమునకు సప్లయ్ వ్యాకోచత్వం కనుగొనుము.

(i) $x = f(p) = 5 + 3p^2$; $x =$ సప్లయ్ పరిమాణం, $p =$ ధర

(ii) of q=f(p) = $3+5p^2$ q= సప్లయ్ పరిమాణం, p = ధర అయితే e_s at p = 2 and p = 3 వద్ద కనుగొనుము.

(II) ఒక వస్తువు యొక్క డిమాండ్ ప్రమేయం $x = f(y) = 100 + 0.8y$ అయితే ఆదాయ వ్యాకోచత్వమును $y = 100, 1000, 200$ ల వద్ద ఆదాయ వ్యాకోచత్వంను కనుగొనుము.

జవాబులు :

I $\quad (i) e_s = \dfrac{6p^2}{5+3p^2}, (e_s)_{p=2} = \dfrac{24}{17} > 1, (e_s)_{p=3} = \dfrac{27}{16} > 1$

$(ii) e_s = \dfrac{10p^2}{3+5p^2}, (e_s)_{p=2} = \dfrac{40}{23} > 1; (es)_{p=3} = \dfrac{45}{24} > 1$

II $\quad e_y = \dfrac{0.8y}{100+0.8y} (e_y)_{y=100} = \dfrac{4}{9} < 1 \ (ii) \dfrac{4}{9} > 1 (iii) \dfrac{4}{7} < 1$

5.4 మొత్తం రాబడి, సగటు రాబడి, ఉపాంత రాబడి మరియు డిమాండ్ వ్యాకోచత్వంల మధ్య గల సంబంధం:

ముందు భాగంలో డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము, రాబడి, మొత్తం రాబడి, సగటు రాబడి, ఉపాంత రాబడిల గూర్చి తెలుసుకున్నాము. ఇక్కడ వాటి మధ్య గల సంబంధంను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

మొత్తం రాబడి (TR) $= R = p.q$

ఉపాంత రాబడి (MR) $= \dfrac{d}{dq}(R)$

$$MR = \frac{d}{dq}(p \cdot q)$$

$$\frac{d}{dq}(uv) = u \cdot \frac{d}{dq}(q) + v \cdot \frac{d}{dq}(r)$$

$$= p \cdot \frac{d}{dq}(q) + q \cdot \frac{d}{dq}(p)$$

$$= p \cdot \frac{dq}{dq} + q \cdot \frac{dp}{dq}$$

$$= p\left[1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}\right]$$

$$= p\left[1 + \frac{1}{\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}}\right]$$

$$= p\left[1+\frac{1}{ed}\right] \because ed = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$$

$$= AR\left[1-\frac{1}{ed}\right][\because AR = p]$$

$$MR = AR\left[1-\frac{1}{ed}\right]$$

పై మూడింటి మధ్య గల సంబంధాన్ని ఈ విధంగా వ్రాయగా

$$MR = AR\left(1-\frac{1}{ed}\right)$$

$$\frac{MR}{AR} = 1-\frac{1}{ed}$$

$$\frac{1}{ed} = 1-\frac{MR}{AR}$$

$$\frac{1}{ed} = \frac{AR-MR}{AR}$$

$$ed = \frac{AR}{AR-MR}$$

ఉదాహరణ : డిమాండ్ ప్రమేయము $p = 50-3x$ అయితే $p = 5$ వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము $\eta = \frac{AR}{AR-MR}$ ను కనుగొనండి.

$$p = 50-3x$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}(50-3x)$$

$$= \frac{d}{dx}(50)-3\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 0-3 \quad = -3$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{50-3x}{3x}$$

$p = 5$ వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము

$$\eta = \frac{50-3(5)}{3(5)}$$

$$= \frac{50-45}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9} = 0.11$$

అయితే మొత్తం రాబడి $(TR) = p \cdot x$

$$= (50-3x)x$$

$$TR = 50x - 3x^2$$

ఉపాంత రాబడి $(MR) = \frac{d}{dx}(TR)$

$$= \frac{d}{dx}\left(50x - 3x^2\right)$$

$$= 50\frac{d}{dx}(x) - 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= 50 - 6x$$

సగటు రాబడి = ధర = $p = 5$

ఉపాంత రాబడి, ధర 15 వద్ద

$$MR = 50 - 6(15)$$

$=50 - 90$

$= -40$

$=-40 < 0$

$$\eta_d = \frac{AR}{AR - MR}$$

$$= \frac{5}{5-(-40)}$$

$$= \frac{5}{5-(-40)}$$

$$=\frac{5}{5+40}$$

$$=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}=0.11$$

$\therefore$ కాబట్టి డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం $\frac{AR}{AR-MR}$ కు సమానము.

అభ్యాసం :

1. డిమాండ్ ప్రమేయము $p=100-x-x^2$ అయితే $p=10\left(\text{or } x=9\right)$ వద్ద డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము $=\frac{AR}{AR-MR}$ అని చూపండి.

2. డిమాండ్ ప్రమేయము $p=12+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క మొత్తం రాబడి, $x=\frac{3}{4}, x=1, x=\frac{1}{2}$ వద్ద ఉపాంత రాబడి కనుగొనండి.

జవాబు :

1. $ed=0.06$,

2. $TR=12x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^2$, 12.19, 12, 12.5

6.5 మాదిరి పరిక్షా ప్రశ్నలు :

1. ఒక ప్రమేయాన్నుంచి డిమాండ్ వ్యాకోచత్వము కనుగొనుట.
2. ఒక ప్రమేయాన్నుంచి సప్లయి వ్యాకోచత్వము కనుగొనుట.
3. రాబడి, సగటు రాబడి, ఉపాంత రాబడి, మరియు డిమాండ్ వ్యాకోచత్వమునకు గల సంబంధమును కనుగొనుట.

6.6 చదవవలసిన పుస్తకాలు :

1. A.C. Chiang - Fundamental Methods Mathematical Economics, Mc Graw Hill, Second Edition
2. Allen, R.G.D. - Mathematical Analysis for Economics, Mac Millons & Co.Ltd.,
3. Yanane. T. - Mathematics for Economics, Printice Hall Inc.
4. Baswant Kandoi - Mathematics for Business and Economics with Applications.

పాఠం - 7

పాక్షిక అవకలనం

విషయ క్రమం :

7.0 ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు :

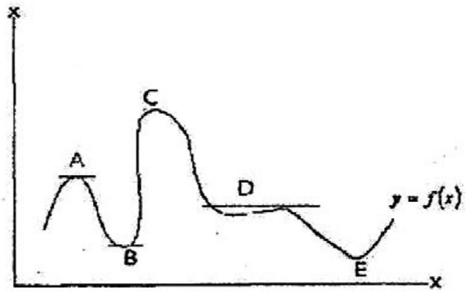
పాక్షిక అవకలనమును గూర్చి తెలుసుకొనడము మరియు ఈ ప్రక్రియను సూక్ష్మార్థిక శాస్త్రములోని వినిమయము ఉత్పత్తి సిద్ధాంతాల్లో కొన్ని సమస్యలకు అనువర్తింపజేయటం గూర్చి వివరించటమే ఈ భాగం యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశం. ఈ భాగాన్ని చదివి ఈ క్రింది విషయములు అవగాహన చేసుకొనవచ్చును.

1. ప్రమేయాలకు గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువలు కనుగొనుట.

2. రెండు చలరాశుల ప్రమేయమును, అంతర్లీన ప్రమేయమును గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.

7.1 ప్రమేయాలకు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుట (Finding Maximum and Minimum)

y = f(x) అనే ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు ఉంటాయి. రెండింటిని కలిపి అంత్య విలువలు అని అంటారు. y = f(x) అనే ప్రమేయంలో x అనే ప్రమేయంలో x యొక్క ప్రదేశము (domain)ను విస్తరించినట్లయితే, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కొన్ని బిందువుల వద్ద సంభవించవచ్చు. క్రింద గీచిన రేఖాచిత్రము మీరు గమనిస్తే మీకు విపులంగా తెలుస్తుంది.



పై చిత్రంలో రెండు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు, ఒక నీతి పరావర్తన బిందువు ఉన్నాయి. ఇందులో A, C లు గరిష్ట బిందువులు. B, E లు కనిష్ట బిందువులు. D నీతి పరావర్తన బిందువు. ఈ D అనే బిందువు వద్ద ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ ఉండదు. గరిష్ట విలువ ఉండదు. C అనే బిందువు వద్ద ప్రమేయానికి గరిష్ట విలువలో అత్యధిక విలువ కాబట్టి దానిని గోళ గరిష్టత (global maximum) అని, తదితర గరిష్ట బిందువులను (A లాంటి బిందువులు) స్థానిక గరిష్టత (local maximum) అని అంటారు. అదే విధంగా అన్నింటికంటే అతి తక్కువ బిందువును (E లాంటి బిందువును) గోళ కనిష్టత (global minimum) అని తదితర కనిష్ట బిందువులను (B లాంటి బిందువులు) స్థానిక కనిష్టత (local minimum) అని అంటారు.

7.2 ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు (Necessary and sufficient conditions) :

y=f(x) అనే ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనాలంటే ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు కలవు. ఈ నియమాలను అవకలనం ద్వారా కనుగొనవలెను.

గరిష్ట విలువకు నియమాలు	కనిష్ట విలువకు నియమాలు
$\frac{dy}{dx}=0$ అన్నది ఆవశ్యక నియమం	$\frac{dy}{dx}=0$ అన్నది ఆవశ్యక నియమము
$\frac{dy}{dx}=0, \frac{d^2y}{dx^2}<0$ అన్నది పర్యాప్త నియమము	$\frac{dy}{dx}=0, \frac{d^2y}{dx^2}<0$ అన్నవి పర్యాప్త నియమాలు

ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనవచ్చును.

Step 1. $y=f(x)$ అనే ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

2. $\frac{dy}{dx}=0$ అయ్యే చోట x విలువలను కనుగొనుము. అవి a, b, c అనుకొనుము.

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

4. $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

5. $\phi(x)$లో $x = a$ ని ప్రతిక్షేపించుము.

6. $\frac{d^2y}{dx^2}$ విలువ ఋణాత్మకమయితే $x = a$ వద్ద ఆ ప్రమేయము గరిష్టమవుతుంది.

7. $\frac{d^2y}{dx^2}$ విలువ ధనాత్మకమయితే $x = a$ వద్ద ఆ ప్రమేయము కనిష్టమవుతుంది.

8. అదే విధంగా x = a, b, c,... మొదలగు విలువలకు కూడా ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనవచ్చు.

9. ఆ ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కావాలంటే $y = f(x)$, $x = a, b, c...$ లు ప్రతిక్షేపిస్తే ఆయా విలువలు వస్తాయి.

ఉదా : $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$కి గరిష్ట కనిష్ట విలువలను కనుగొనుము.

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36$$

ఆవశ్యక నియమాన్ని బట్టి $\frac{dy}{dx} = 0 = 6x^2 + 6x - 36 = 0 = x^2 + x - 6 = 0$

$= (x-2)(x+3) = 0$ అంటే $x = 2,$ లేక $x = -3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(6x^2 + 6x - 36\right) = 12x + 6$$

$x = 2$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2} = 12.2 + 6 = 24 + 6 = 30 > 0$

$x = 3$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-3) + 6 = -36 + 6 = -36 < 0$

అందు చేత, $x = 2$ వద్ద యిచ్చిన ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువ వుంటుంది.

$x = -3$ వద్ద యిచ్చిన ప్రమేయానికి గరిష్ట విలువ వుంటుంది.

కనిష్ట విలువ కావలంటే $x=2$ ను ప్రమేయంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

$x=2$ అయితే $2(2)^3+3(2)^2-36(2)+10=-34$ (కనిష్ట విలువ)

$x=-3$ అయితే $2(-3)^3+3(-3)^2-36(-3)+10=91$ (గరిష్ట విలువ)

అభ్యాసము : క్రింది ప్రమేయాలకు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనండి.

1. $y=x^2-3x+2$ 2. $y=3x-12x^2$ 3. $y=x^3-3x$ 4. $y=2x^2-3x^3$ 5. $y=3x^2-12x+12$

జవాబులు :

1. కనిష్ట $x=\frac{3}{2}$ 2. గరిష్ట $x=\frac{1}{8}$ 3. కనిష్ట $x=1$, గరిష్టం $x=-1$

4. కనిష్ట $x=0$, గరిష్ట $x=\frac{4}{3}$ 5. కనిష్ట $x=2$

7.3 ఆర్థికానువర్తాలు :

సూక్ష్మ ఆర్థిక శాస్త్రంలో గల వివిధ రకాల ప్రమేయాలకు అంత్య విలువలు తెలుసుకొనుట వలన వివిధ రకములైన ఉపయోగాలు ఉన్నవి. సూక్ష్మ ఆర్థిక శాస్త్రంలో ముఖ్యమైన ప్రమేయాలు.

1. వ్యయ ప్రమేయము (కనిష్ట వ్యయము)
2. రాబడి ప్రమేయము (గరిష్ట రాబడి)
3. లాభాల ప్రమేయము (గరిష్ట లాభము)

7.3.1 కనిష్ట వ్యయము : వ్యయ ప్రమేయము c=f(x) లో c = మొత్తము వ్యయము, x = ఉత్పత్తి సగటు వ్యయము, $AC=\frac{c}{x}$

ఉపాంత వ్యయము, $MC=\frac{d}{dx}(C)=0$

కనిష్ట సగటు వ్యయము కావాలంటే $\frac{d}{dx}(AC)=0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(AC)=\frac{x\cdot\frac{d}{dx}(c)-c\cdot 1}{x^2}=0 \Rightarrow \therefore x\frac{dc}{dx}=C \Rightarrow \frac{dc}{dx}=\frac{c}{x}$$

ఉపాంత వ్యయము = సగటు వ్యయము

7.3.2 రాబడి ప్రమేయము : డిమాండు ప్రమేయము $p = f(x)$ లో p = ధర = సగటు రాబడి.

$\therefore$ మొత్తం రాబడి $R = F \cdot X$

ఉపాంత రాబడి = $\dfrac{dR}{dx}$

గరిష్ట రాబడి = $\dfrac{dR}{dx} = 0, \dfrac{d^2R}{dx^2} < 0$ అవ్వాలి.

7.3.3 లాభాల ప్రమేయము : లాభమే = రాబడి - వ్యయము

$F = R - C$

గరిష్ట లాభము 1. $\dfrac{dP}{dx} = 0$

$$\text{i.e.,} \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}(R - C) = 0 = \frac{dR}{dx} - \frac{dc}{dx} = 0 \text{ i.e.,} \frac{dr}{dx} = \frac{dc}{dx}$$

ఉపాంత రాబడి = ఉపాంత వ్యయము

2. $\dfrac{d^2p}{dx^2} < 0$

$$\text{i.e.,} \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^2C}{dx^2} < 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(R - c) < 0 \quad \text{i.e.,} \frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2} \text{ i.e.,} \frac{d}{dx}(MR) < \frac{d}{dx}(MC)$$

i.e., ఉపాంత రాబడిలోని మార్పు రేటు < ఉపాంత వ్యయములోని మార్పు రేటు

ఉదాహరణ :

1. $P = \sqrt{12 - x}$ అయినప్పుడు ఏ ఉత్పత్తి వద్ద గరిష్ట రాబడి ఏముంటుందో కనిపెట్టండి.

$P = \sqrt{12 - x}$ అయితే మొత్తం రాబడి = $P \cdot x$

$R = P \cdot x$

$= x\sqrt{12 - x}$

గరిష్ట విలువలకు $\dfrac{dR}{dx} = 0$ అవ్వాలి.

$$\frac{dR}{dx} = x \cdot \frac{1}{2}(12-x) - \frac{1}{2} + \sqrt{12-x} = 0 \quad \text{i.e., } x + 24 - 2x = 0 \Rightarrow 24 - x = 0 \Rightarrow x = 24$$

$x = 24$ వద్ద గరిష్ట రాబడి $= x \cdot \sqrt{12-x}$

$$= 24\sqrt{12-x} = 24\sqrt{1-12}$$

2. ఏకస్వామ్య సంస్థ యొక్క డిమాండు ప్రమేయము F, $P = 15 - 2x$, మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము $c = x^2 + 2x$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభమెంత.

ఆదాయ ప్రమేయము $R = P \cdot x$

$$= x(15-2x)$$

$$= 15x - 2x^2$$

వ్యయ ప్రమేయము $P = R - C$

$$P = 15x - 2x^2 - x^2 - 2x$$

$$= 13x - 3x^2$$

గరిష్ట లాభం, $\frac{dP}{dx} = 13 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{d^2P}{dx^2} = -6 < 0$

$x = \frac{13}{6}$ వద్ద గరిష్ట లాభము, గరిష్ట లాభం $P = 13\left(\frac{13}{6}\right) - 3\left(\frac{13}{6}\right)^2 = 3\left(\frac{13}{6}\right)^2 = 14\frac{1}{12}$

7.4 రెండు చలరాశుల ప్రమేయం - భావన :

x, y, z చలరాశులలో ఏదైనా ఒకదాని విలువ మిగిలిన రెండింటి విలువలపై ఆధారపడి యుంటుందనుకుందాం. ఉదాహరణకు z విలువ x, y విలువలపై ఆధారపడి వుంటుందని తెలిసినపుడు x, y, z చలరాశుల మధ్య గల సంబంధమును తెలియజేసే ప్రమేయమును సంకేతరూపంలో ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$z = f(x, y)$$

ఇచ్చుట z ను అస్వతంత్ర చలరాశి అని, x, yలను స్వతంత్ర చలరాశి అని అంటారు. ఒక వ్యక్త ప్రమేయములో రెండు స్వంతంత్ర చలరాశులుంటే దానిని రెండు చలరాశుల ప్రమేయమంటారు. ఉదాహరణకు $z = x^2 + y^2$ అనేది రెండు చలరాశులలో ప్రమేయము.

7.5 పాక్షిక అవకలన గుణక భావన :

రెండు చలరాశుల ప్రమేయము z = f(x, y) యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. ప్రమేయము z = f(x, y) లో y ని స్థిరముగా నుంచి కనుగొనిన పాక్షిక అవకలన గుణకమును x తో z యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. దీనిని

సంకేత రూపంలో $\frac{dz}{dx}$ లేక $\frac{df}{dx}$ లేక $f_x^{'}$ అని వ్రాస్తారు. ఇదే విధంగా ప్రమేయము $z = f(x, y)$ లో x ని స్థిరముగా ఉంచి కనుగొనిన పాక్షిక అవకలన గుణకము y తో రెండు పాక్షిక అవకలన గుణకము అంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో $\frac{\partial z}{\partial y}$ లేదా $\frac{\partial t}{\partial y}$ లేదా f_y^1 అని వ్రాస్తారు.

$$= 3(0)+4(1)+0 = 0+4+0 = 4$$

7.6 పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కనుగొనుట :

ఏక చలరాశి ప్రమేయములు అవకలన గుణకములను ఎలా కనుగొంటారో అదే విధంగా పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కూడా కనుగొంటారు. పాక్షిక అవకలన గుణకాలను కనుగొనటానికి వేరే పద్ధతులు లేవు. కాని రెండు విషయాలలో మాత్రం ఈ రెండింటి మధ్య తేడా కలదు. 1. పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనేటప్పుడు ఏ చలరాశితోనైతే పాక్షిక గుణకమును కనుగొంటారో అది తప్ప మిగతా చలరాశులను స్థిరాశులుగా భావించాలి. 2. పాక్షిక అవకలన గుణకాలను సంకేతము 'd' బదులు సంకేతము 'd'తో చూపిస్తారు. సాధారణ అవకలన గుణకాలను కనుగొనే అన్ని నియమాలు, పద్ధతులు పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనడానికి కూడా వర్తిస్తాయి. వాటిని కొన్ని ఉదాహరణలు ద్వారా అవగాహన చేసుకుందాం.

ఉదా : 1

$$z = 3x+4y+3$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4y+3) = \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(4y) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 3\cdot\frac{d}{dx}(x) + 4\cdot\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(3) = 3(1) + 4(0) + 0$$

$$= 3 + 0 + 0 = 3$$

(x తో పాక్షిక అవకలనము చేస్తున్నప్పుడు yని స్థిరముగా భావించాలి. కాబట్టి దాని అవకలన గుణకము సున్నా అవుతుంది.)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(3x+4y+3) = \frac{d}{dy}(3x) + \frac{d}{dy}(4y) + \frac{d}{dy}(3)$$

$$= 3\cdot\frac{d}{dy}(x) + 4\cdot\frac{d}{dy}(y) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 3\cdot\frac{d}{dy}(x) + 4\cdot\frac{d}{dy}(y) + \frac{d}{dx}(3)$$

ఉదా : 4 $z = \frac{x^2}{x-y+1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x-y+1)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)-x^2\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x-y+1)}{(x-y+1)^2}=\frac{2x^2-2xy+2x-x^2}{(x-y+1)^2}$$

$$=\frac{(x-y+1)\cdot 2x-x^2(1-0+0)}{(x-y+1)^2}=\frac{2x^2-2xy+2x-x^2}{(x-y+1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2xy+2x}{(x-y+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x-y+1)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right)-x^2\frac{\partial}{\partial y}(x-y+1)}{(x-y+1)^2}=\frac{(x-y+1)(0)-x^2(0-1+0)}{(x-y+1)^3}$$

$$\frac{0\left(-x^2\right)-1}{(x-y+1)^2}=\therefore\frac{oz}{oy}=\frac{x^2}{(x-y+1)^2}$$

ఉదా : 5 $z=\frac{x^2}{y}-\frac{y}{x^3}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)-y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-3}\right)=\frac{1}{y}\cdot 2x-y-3\cdot x^{-3-1}=\frac{1}{y}\cdot 2x+3y\,x^{-4}=\frac{2x}{y}+\frac{3y}{x^4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-1}\right)-\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$=x^2-1\cdot y^{-1-1}-\frac{1}{x^3(1)}-x^2y^{-2}-\frac{1}{x^3}=\frac{-x^2}{y^2}-\frac{1}{x^3}$$

ఉదా : 6 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$z=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{1/2-1}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\cdot x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{1/2-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot 0+2y$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} \cancel{2} y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

అభ్యాసము : 1 ఈ క్రిందనీయబడిన ప్రమేయములను పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

1. $z = 6x + 3x^2y - 7y^2$ 2. $z = (3x+2)(2y+4)$ 3. $z = \left(x^2 - 3y\right)\left(x^2+4\right)$ 4. $z = \dfrac{3x-4y}{2x+y}$ 5. $z = \dfrac{4x+3}{2y-4}$

ఉదా : 2 $z = 2x^2 + 4xy + 3y^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 4xy + 3y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dx}(4xy) + \frac{d}{dx}\left(3y^2\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 4y\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 2 \cdot 2x + 4y(1) + 3(0)$$

$$= 4x + 4y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}\left(2x^2 + 4xy + 3y^2\right) = \frac{d}{dy}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dy}(4xy) + \frac{d}{dy}\left(3y^2\right)$$

$$= 0 + 4x(1) + 3.2\, y = 4x + 6y$$

ఉదా : 3 $z = (x+5)(2x+3y)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x+5)(2x+3y)\right]$$ (లబ్దపు నియమమునుసరించి)

$$= (x+5)\frac{d}{dx}(2x+3y) + (2x+3y)\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$= (x+y)\left[2\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{d}{dx}(y)\right] + (2x+3y)\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)\right]$$

$$= (x+5)\left[2\cdot(1) + 3\cdot(0)\right] + (2x+3y)(1+0) = (x+5)2 + (2x+3y)1$$

$$= 2x + 5 + 2x + 3y$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 4x + 3y + 5$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x+5)(2x+3y) = (x+y)\cdot\frac{d}{dy}(2x+3y) + 2x + 3y\frac{d}{dy}(x+5)$$

7.7 పాక్షిక అవకలనాలు - ఆర్థికానువర్తనాలు (Economic application of partial differentiation)

ప్రయోజన ప్రమేయం - పాక్షిక అవకలన గుణకము అనువర్తన : ఒక వినియోగదారుడు రెండు వస్తువులు x, y లను వినియోగిస్తున్నప్పుడు అతని ప్రయోజన ప్రమేయము u=f(x, y) గా వ్రాయవచ్చునని ఇది వరకు తెలుసుకున్నాము. ప్రయోజన ప్రమేయము u=f(x, y) యొక్క పాక్షిక అవకలన గుణకములు $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ లు y వినియోగములో ఏ మార్పు లేకుండా, x వినియోగంలో ఏమీ మార్పు లేకుండా y వినియోగంలో ఒక యూనిట్ మార్పు వచ్చినప్పుడు ప్రయోజనము u లో వచ్చిన మార్పును తెలియజేస్తుంది. అనగా $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x$ యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనమును $\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y$ యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము తెలియజేస్తాయి.

ఉదా : ఒక వినియోగదారుని ప్రయోజన ప్రమేయము :

$u = x^2 + y^2$ అనుకుందాము.

x యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x + 0 = 2x$

y యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 0 + 2y = 2y$

ఉత్పత్తి ప్రమేయం - పాక్షిక అవకలన గుణకము అనువర్తన

x అనే వస్తువు యొక్క ఉత్పత్తి, రెండు ఉత్పత్తి కారకాలు, శ్రమ (L), మూలధనము (K)పై ఆధారపడి యున్నప్పుడు ఉత్పత్తి ప్రమేయము x=f(L, K) అవుతుంది.

ఈ ఉత్పత్తి ప్రమేయము యొక్క పాక్షిక అవకలన గణకములు $\frac{\partial u}{\partial L}, \frac{\partial u}{\partial K}$ ఉత్పత్తిలో శ్రమ వలన, పెట్టుబడి వలన ఉత్పత్తిలో వచ్చే మార్పును తెలియజేస్తాయి. కాబట్టి $\frac{\partial u}{\partial L}$ శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి (Marginal Productivity of Labour) $\frac{\partial x}{\partial K}$ మూలధనము యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి (Marginal Productivity of Capital) అవుతుంది.

ఉదాహరణలు :

ఉత్పత్తి ప్రమేయము : $x = 3L^2 + 2KL + 4K^2$

శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి : $\therefore \frac{\partial x}{\partial K} = 3(0) + 2L(1) + 4.2k = 2L + 8K$

అభ్యాసము : ఈ క్రింద నీయబడిన ప్రమేయములకు ఉపాంత ఉత్పత్తులను కనుగొనుము.

(1) $x = AL^{\alpha}K^{\beta}$ (2) $x = 30K^2 - 24LK + 15K^2$ (3) $x = \sqrt{2LK - AL^2 - BK^2}$

7.8 హెచ్చు తరగతి పాక్షిక అవలకన గుణకములు :

$Z = f(x, y)$ ప్రమేయము యొక్క రెండు పాక్షిక అవకలన గుణకములు x, y చలరాశులలో $\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$. ఈ పాక్షిక అకవలన గుణకములను మరలా పాక్షికముగా అవకలనము చేయవచ్చును. అలా అవకలనము చేయగా వచ్చిన పాక్షిక అవకలన గుణకములను రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలుంటాయి. వాటిని సంకేత రూపంలో ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

ఈ $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ లను వరుసగా $f_{xy^2}, f_{yx^2}, f_{xy}, f_{yx}$ అని కూడా వ్రాస్తారు. వీటిలో $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ లను రెండవ తరగతి శుద్ధ పాక్షిక అవకలన గుణకాలని, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}$ లను రెండవ తరగతి మిశ్రమ పాక్షిక అవకలన గుణకాలని అంటారు.

రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలు మరలా x, y చలరాశులలో ప్రమేయాలవుతాయి. వాటిని x, y లలో పాక్షిక అవకలనము చేయగా వచ్చు పాక్షిక అవకలన గుణకాలను మూడవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలంటారు. మూడవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలను పాక్షిక అవకలనము చేయగా వచ్చు పాక్షిక అవకలన గుణకాలను నాల్గవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకాలంటారు. ఇదే పద్ధతి పొడిగిస్తే ఐదవ తరగతి, ఆరవ తరగతి... పాక్షిక అవకలన గుణకాలు రాబట్టవచ్చును.

ఉదా : ఈ క్రింది ప్రమేయమునకు మొదటి తరగతి, రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

$$z = 3x^3 + 11xy^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 + 11xy^2 - 3y^2\right) = 3.3x^2 + 11y^2(1) - 0 = 9x^2 + 11y^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3 + 11x^2 - 3y^2\right) = 0 + 11\,x \cdot 2y - 3.2y = 22xy - 6y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(9x^2 + 11y^2\right) = 9(2x) + 11(0) = 18x$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial Z}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(22xy - 6y)$$

$= 22x(1) - 6(1) = 22x - 6$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(22x - 6y) = 22y(1) - 0 = 22y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(9x^2 + 11y^2\right) = 0 + 11 \cdot 2y = 22y$$

$Z = xy^2 - 3x - 5y$

$f(x) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy^2 - 3x - 5y\right]$ (ఇక్కడ y స్థిరరాశిగా భావించాలి.)

$$= y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x) - 3\frac{\partial}{\partial x}(x) - y\frac{\partial}{\partial x}(5)$$

$$= y^2(1) - 3(1) - y(0)ax$$

$$= y^2 - 3$$

$$f(y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xy^2 - 3x - 5y\right]$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) - 3 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) - 5\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= x \cdot 2y - 3(0) - 5(1)$$

$$= 2xy - 5$$

$f(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y^2 - 3\right]$ ఇక్కడ yను స్థిరరాశిగా భావించాలి.

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}(3)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$f(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - 3\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(3)$$

$$= 2y - 0 = 2y$$

$$f(yy) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 5)$$

$$= 2x\frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(5)$$

$$= 2x(1) - 0$$

$$= 2x$$

$$f(yx) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{xy}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[2xy - 5]$$

$$= 2y\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(5)$$

$$= 2y - 0$$

$$= 2y$$

7.9 అవగాహన ప్రశ్నలు :

1. పాక్షిక అవకలన భావనను వివరించుము.
2. ఈ క్రింది ప్రమేయములకు పాక్షిక అవకలనము కనుగొనండి.

   $(a)\, z = 7x^3 + xy + 2y^5$ $\quad (b)\, z = \dfrac{5x}{6x - 7y}$ $\quad (c)\, z = (2x^2 + 6y)(5x - 3y^2)$

3. ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు రెండవ తరగతి, శుద్ధ మరియు పాక్షిక అవకలనాలను కనుగొనండి.

   $(a)\, z = x^2 + 2xy + y^2$ $\quad (b)\, z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^2 - 2y^3$ $\quad (c)\, z = (x^3 + 2y)^4$

4. ఈ క్రింది ఉత్పత్తి ప్రమేయములకు ఉపాంత ఉత్పత్తులను కనుగనండి.

   $(a)\, Q = 0.5K^2 - 2KL + L^2$ $\quad (b)\, Q = x^2 - 2xy + 3y^2$ $\quad (c)\, Q = 3x^2 + 5xy + 4y^2$

5. ద్విచలరాశి ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనే పద్ధతిని వివరింపుము.
6. $z = 6x^2 - 9x - 3xy - 7y + 5y^2$ అనే ప్రమేయమునకు, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.
7. ఈ క్రింది ప్రమేయములకు రెండవ తరగతి శుద్ధ (pure) మరియు మిశ్రమ (mixed) పాక్షిక అవకలన గుణకములను కనుగొనుము.

1, $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 2. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 3. $z = \log\left(\frac{x}{x+y}\right)$ 4. $z = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$

5. $z = \log\frac{x^2 + y^2}{xy}$ అను ప్రమేయమునకు $\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial y\ \partial x}$ అని చూపుము.

7.10 సంప్రదించు గ్రంథాలు :

1. Alpha C. Chaiang — Fundamental methods of Mathematical Economics, Third Edition, Mc.Graw - Hill, International Editions

2. R.G.B. Allen — Mathemaical Analysis for Economics, MAC Million

3. Edward T. Bowling — Theory and Progress of Mathematics for Economics, Scyanm's artlin series, Mc-Graw Hill stock Company.

పాఠం - 8 # పూర్ణ అవకలనము - ఆర్థికానువర్తాలు

విషయ క్రమం :

8.0 ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు :

1. పాక్షిక అవకలని భావన, నిర్వచనము, పాక్షిక అవకలని కనుగొనే పద్ధతులు, వాటి ఆర్థిక అనువర్తాలను గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.

2. సంపూర్ణ అవకలన భావన, నిర్వచనం, కనుగొనే పద్ధతిని గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును.

8.1 పూర్ణ అవకలని (Total Differentiation) :

$z = f(x, y)$ అను రెండు చలరాశుల ప్రమేయంలో y లో ఏమీ మార్పు లేకుండా x మార్పు చెందినా x లో ఏమీ మార్పు లేకుండా y మార్పు చెందినా, లేక x, y లు రెండు మార్పు చెందినా, zలో మార్పు వస్తుంది. చలరాశులు x, y రెండు మార్పు చెందినప్పుడు z లో వచ్చే మార్పు, x స్థిరముగా నుండి y మార్పు చెందినప్పుడు z లో వచ్చిన మార్పు మరియు y స్థిరముగా నుండి x మార్పు చెందినప్పుడు, z లో వచ్చే మార్పులు మొత్తమునకు సమానము.

ఇచ్చిన ఒక ప్రమేయము $z=f(x, y)$ యొక్క మొదటి తరగతి పాక్షిక అవకలన గుణకములైన $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ లను కనుగొని వాటిని, సమీకరణము $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

ఉదా : 1 $z = 3x^2 + xy - 2y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right) = 3 \cdot 2x + y(1) - 0 = 6x + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right)$$

$$= 0 + x(1) - 2 \cdot 3y^2 = x - 6y^2$$

$\therefore$ సంపూర్ణ అవకలని, $\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (6x + y)dx + \left(x - 6y^2\right)dy$

ఉదా : 2 : $2 = \frac{x}{x + y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x + y}\right) = \frac{(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x) - (x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{x + y - x}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x + y}\right) = \frac{(x + y)\frac{\partial}{\partial y}(x) - x\frac{\partial}{\partial y}(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{(x + y) \cdot 0 - x(1)}{(x + y)^2} = \frac{-x}{(x + y)^2}$$

$\therefore$ సంపూర్ణ అవకలని $dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy = \frac{y}{(x + y)^2}dx + \frac{-x}{(x + y)^2} \cdot dy = \frac{1}{(x + y)^2}[y\,dx - x\,dy]$

అభ్యాసము : ఈ క్రింది ప్రమేయములకు సంపూర్ణ అవకలని కనుగొనుము.

1. $z = 2x + 9xy + y^2$ 2. $z = \frac{2xy}{x + y}$ 3. $z = \frac{x^2}{x - y + 1}$ 4. $z = \log\left(x^2 + y^2\right)$ 5. $z = (x + y)(x - y)$

8.1.1 పూర్ణ అవకలన గుణకము (Total differential Coefficient) : చలరాశి z, చలరాశులు x, w లలో ఒక ప్రమేయము i.e., $z = f(x, y)$ మరియు $x = \phi(w)$ అయినప్పుడు, $\frac{\partial z}{\partial w}$ ను $z = f(x, w)$ ప్రమేయము యొక్క పూర్ణ అవకలన గుణకమంటారు. ఈ పూర్ణ అవకలన గుణకమును కనుగొనుటకు మొదట $z = f(x, w)$ యొక్క పూర్ణ అవకలనిని కనుగొని దానిని dw తో భాగించవలెను.

ప్రమేయము z=f(x, w) యొక్క పూర్ణ అవకలని

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot dw$$

దీనిని రెండు వైపులా dw తో భాగించగా

$$\frac{dz}{dw}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dw}$$ అవుతుంది.

అప్పుడు పూర్ణ అవకలనిని గుణకము

$$\frac{dz}{dw}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{\partial z}{\partial w}$$ అవుతుంది.

ఉదా : $z=3x-w^2$ ఇచ్చిన ప్రమేయము ఇక్కడ $x=2w^2+w+4$

పూర్ణ అవకలన గుణకము $\frac{dz}{dw}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{\partial z}{\partial w}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x-w^2\right)=3(1)-0=3$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial w}\left(3x-w^2\right)=-2w$$

$$\frac{dx}{dw}=\frac{d}{dw}\left(2w^2+w+4\right)=2\cdot 2w+1=4w+1$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{\partial z}{\partial w}=3\left(4w+1\right)-2w=12w+3-2w=10w+3$$

ఉదా : ఇచ్చిన ప్రమేయము $z=2x+xy-y^2,\ x=3y^2$

ఈ ప్రమేయమునకు పూర్ణ అవకలన గుణకము

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cdot xy-y^2\right)=2(1)+y(1)-0=2+y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+xy-y^2\right)=0+x(1)-2y-x-2y$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(3y^2\right)=3\cdot 2y=6y$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2+y\right)\cdot 6y+\left(x-2y\right)=12y+6x^2+x-2y=6y^2+10y+x$$

8.2 ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట విలువలు :

ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుటకు కావలసిన ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను (necessary and sufficient conditions) తెలుసుకొనవచ్చును మరియు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను ఉపయోగించి చలరాశులు ఏ విలువలు దగ్గర ప్రమేయము గరిష్ట, కనిష్టమవుతుందో తెలుసుకొనవచ్చును. మరియు ప్రమేయము యొక్క గరిష్ట కనిష్ట విలువలను కనుగొనడాన్ని గూర్చి తెలుసుకోవచ్చు.

$z = f(x, y)$ ప్రమేయం గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను గూర్చి విపులముగా చెప్పాలంటే x చలరాశి, 'a' విలువ నుండి y చలరాశి 'b' విలువ నుండి ఏ విధంగా మారినా (a, b) బిందువు దగ్గర z గరిష్టమైతే ఆ ప్రమేయానికి (a, b) బిందువు దగ్గర గరిష్ట విలువ వుందంటారు. అలాగే x చలరాశి 'a' విలువ నుండి y చలరాశి 'b' విలువ నుండి ఎలా మారినా (a, b) బిందువు దగ్గర z కనిష్ట విలువ కలిగియుంటే ఆ ప్రమేయము (a, b) బిందువు దగ్గర కనిష్ట విలువ కలిగియుందంటారు. కాబట్టి $z=f(x, b)$ అనే ప్రమేయము x యొక్క మార్పుతోను, y యొక్క మార్పుతోను గరిష్ట (కనిష్ట) విలువ కలిగియున్నప్పుడే ఆ ప్రమేయమం గరిష్ట (కనిష్ట) విలువ కలిగియుందంటారు.

$z = f(x, y)$ అనే ప్రమేయపు అంత్య విలువలు సూచించే బిందువుల దగ్గర $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అవుతుంది. కాని $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అనే నియమం ఈ ప్రమేయం అంత్య విలువలకు అవశ్యక నియమమే కాని పర్యాప్త నియమం కాదు. ఎందుకంటే కొన్ని ప్రమేయాలకు, అంత్య విలువలను చెప్పలేని బిందువుల దగ్గర $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ అవుతుంది. కాని అవి ప్రమేయానికి అంత్య విలువ కాదు.

ఒక ప్రమేయం అంత్య విలువలు ఆ ప్రమేయపు గరిష్ట కనిష్ట విలువలు సూచిస్తాయి. $z = f(x, y)$ ప్రమేయపు యొక్క గరిష్ట విలువలను సూచించు బిందువు వద్ద $\frac{\delta f}{\delta x^2} < 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta^2 y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \cdot \delta y}\right)^2$ అవుతుంది. అలాగే ప్రమేయపు కనిష్ట విలువలను సూచించే బిందువు దగ్గర $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x . \delta y}\right)^2$ అవుతుంది.

పైన చెప్పడానికి విపర్యముగా, $z = f(x, y)$ ప్రమేయపు ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta t}{\delta x} = 0, \frac{\delta t}{\delta y} = 0, \frac{\delta^2 t}{\delta x^2} < 0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2} < 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\ \delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు దగ్గర ఆ ప్రమేయపు గరిష్ట విలువ కలిగియుంటుంది. అలాగే $z=f(x, y)$ ప్రమేయము యొక్క ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x} = 0, \frac{\delta f}{\delta y} = 0, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0$ మరియు $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right) \cdot \left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \cdot \delta y}\right)^2$ కనిష్ట

విలువ కలిగియుంటుంది. z = f(x, y) ప్రమేయము యొక్క ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta t}{\delta x}=0, \frac{\delta t}{\delta y}=0$ అయి $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right)<\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\cdot\delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు Saddle బిందువు అవుతుంది. ఆ బిందువు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువలు ఉండవు. అలాగే z=f(x, y) ప్రమేయపు ఒక బిందువు దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$ అయి $\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right)=\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\cdot\delta y}\right)^2$ అయితే ఆ బిందువు దగ్గర ప్రమేయం గరిష్ట కనిష్ట విలువ కలిగియుంటుందో లేక కనిష్ట విలువ కలిగియుంటుందో చెప్పలేం.

z = f(x, y) ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు :

1. ఆవశ్యక నియమం : (a) z = f(x, y) అను ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట (అంత్య) విలువల దగ్గర $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$ అవుతుంది.

2. పర్యాప్త నియమం : (a) z = f(x, y) అను ప్రమేయం ఒక అంత్య విలువ దగ్గర $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}<0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}<0, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\,\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}>\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\right)$ అయితే ఆ అంత్య విలువ ఆ ప్రమేయపు గరిష్ట విలువ అవుతుంది.

(b) z = f(x, y) అను ఒక ప్రమేయపు అంత్య విలువ దగ్గర $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}>0, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}>0, \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\,\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}>\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y}\right)$ అయితే, ఆ అంత్య విలువ ఆ ప్రమేయపు కనిష్ట విలువ అవుతుంది.

పైన చెప్పిన ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను వరుసగా z = f(x, y) అను ప్రమేయపు కనిష్ట, గరిష్ట విలువలకు సంబంధించిన మొదటి తరగతి నియమం (First Order Condition) రెండవ తరగతి నియమం (Second Order Condition) అని కూడా అంటారు.

పైన చెప్పబడిన z = f(x, y) అనే ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలకు సంబంధించిన నియమాలను పట్టిక రూపంలో ఈ క్రింద చూపబడిన విధంగా వ్రాయవచ్చు.

నియమం	గరిష్ట	కనిష్ట	సాడిల్ బిందువు
మొదటి తరగతి నియమం	$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial y}=0$	$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial y}=0$	$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial y}=0$
రెండవ తరగతి నియమం	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}=\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}<0$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}>0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2}>0$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2}$ వ్యతిరేక గుర్తులు
	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\,\delta y}\right)^2$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\,\delta y}\right)^2$	$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}<\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\,\delta y}\right)^2$

8.2.1 ఒక ద్విచలరాశి ప్రమేయపు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనే పద్ధతి : ఇచ్చిన ప్రమేయపు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు సంబంధించిన మొదటి తరగతి నియమాలను వ్రాస్తే రెండు సమీకరణాలు వ్రాస్తాయి. వాటిని సాధించగా ప్రమేయానికి అంత్య విలువలనిచ్చే రెండు చలరాశుల విలువలు వస్తాయి. వీటిలో ఏ విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ఠ విలువ వుంటుందో, ఏ విలువ దగ్గర ప్రమేయానికి కనిష్ఠ విలువ వుంటుందో అనే విషయం రెండవ తరగతి నియమం సహాయంతో తెలుసుకొనవచ్చును. ఉదాహరణకు z = f(x, y) అనే ప్రమేయం మొదటి తరగతి నియమమైన $\frac{\delta t}{\delta x}=0, \frac{\delta t}{\delta y}=0$ ను సాధించగా x = a, y = b వచ్చిందనుకుందాం. ఈ x = a, y = b విలువల వద్ద $\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}<0, \frac{\delta^2 t}{\delta y}<0, \left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x \cdot \delta y}\right)^2$ అయితే వాటి దగ్గర ప్రమేయము గరిష్ఠ విలువ కలిగి వుంటుంది. అప్పుడు ఇచ్చిన ప్రమేయంలో x = a, y = b ను ప్రతిక్షేపించగా, ప్రమేయపు గరిష్ఠ విలువ వస్తుంది. ఇలా కాకుండా x = a, y = b విలువలు దగ్గర $\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}>0, \frac{\delta^2 t}{\delta y^2}>0, \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)\cdot\left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right)>\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x\ \delta y}\right)^2$ అయితే ఈ x, y విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. అప్పుడు ఇచ్చిన ప్రమేయంలో x=a, y = b ను ప్రతిక్షేపించగా, ప్రమేయపు కనిష్ఠ విలువ వస్తుంది.

ఉదాహరణ (1) : $z=f(x,y)=x^2+xy+2y^2+36$ అనే ప్రమేయపు అంత్య విలువలు కనుగొనుము.

మొదటి తరగతి నియమం $\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta}{\partial x}\left(x^2+xy+2y^2+3\right)=0$

$$2x+y=0 \quad \text{----------}\ \mathbf{(1)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+2y^2+3\right)=0$$

$$x+4y=0 \quad \text{----------}\ \mathbf{(2)}$$

$$\begin{array}{l} 2x+\ y=0----------(1) \\ \pm 2x \pm 8y=0----------(2)\times 2 \\ -------- \end{array}$$

Sum -7y = 0

$\therefore y=0$

y విలువను సమీకరణము **(1)**లో ప్రతిక్షేపించగా 2x = 0, $\therefore x=0$

$\therefore x=0$, y = 0 దగ్గర ఇచ్చిన ప్రమేయానికి అంత్య విలువ వుంటుంది. ప్రమేయపు ఈ అంత్య విలువ

$z=0^2+0.0+2.0^2+3=3$

2. $z=f(x,y)=-x^2+xy-y^2+2x+y$ అనే ప్రమేయపు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనుము.

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta}{\delta x}\left(-x^2+xy-y^2+2x+y\right)=\frac{\delta z}{\delta x}=-2x+y+2=0 \quad \text{-----}\ \mathbf{(1)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\delta}{\delta y}\left(-x^2+xy-y^2+2x+y\right)=\frac{\delta z}{\delta y}=x-2y+1=0 \quad \text{-------(2)}$$

సమీకరణములు (1), (2)లు సాధించగా

$$-2x+y=-2 \quad (1)$$
$$x-2y=-1 \quad (2)$$

$$-4x+2y=-4 \quad (1)\times 2$$
$$x-2y=-1 \quad (2)$$

$$-3x=-5$$

$\therefore x=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$ x విలువను సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-2\times\frac{5}{3}+y=-2=\frac{10}{3}+y=-2,\ y=-2+\frac{10}{3}=\frac{-6+10}{3}=\frac{4}{3}\ \therefore x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు మొదటి తరగతి నియమాన్ని బట్టి $x=\frac{5}{3}, y=\frac{4}{3}$ దగ్గర అంత్య విలువలు ఉంటాయి. ఈ విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువ వుంటుందో తెలుసుకొనడానికి రెండవ తరగతి నియమాన్ని పరీక్షించవలసియున్నది.

రెండవ తరగతి నియమానికి సంబంధించిన అవకలన గుణకం $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ మరియు $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \delta y}$

$\therefore x=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}x$ విలువను సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-2\times\frac{5}{3}+y=-2=-\frac{10}{3}+y=-2,\ y=-2+\frac{10}{3}=\frac{-6+10}{3}=\frac{4}{3}\ \therefore x=\frac{5}{3},\ y=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు మొదటి తరగతి నియమాన్ని బట్టి $x=\frac{5}{3}, y=\frac{4}{3}$ దగ్గర అంత్య విలువలు ఉంటాయి. ఈ విలువలు దగ్గర ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువ వుంటుందో తెలుసుకొనడానికి రెండవ తరగతి నియమాన్ని పరీక్షించవలసియుననది. రెండవ తరగతి నియమానికి సంబంధించిన అవకలన గుణకం $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ మరియు $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \delta y}$.

$$\therefore \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta z}{\delta x}\right]=\frac{\delta}{\delta x}\left(-2x+y+2\right)=-2(1)+0+0=-2$$

$$\therefore \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}(x - 2y + 1) = 0 - 2(1) + 0 = -2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}(x - 2y + 1) = 0 - 2(1) + 0 = -2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{\delta x}(x - 2y + 1) = 1 - 0 + 0 = 1$$

$\therefore x = \frac{5}{3},\ y = \frac{4}{3}$ విలువలు దగ్గర $\left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right) < 0, \left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right) < 0, \left(\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 t}{\delta y^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\ \delta y}\right)^2$

$\therefore$ రెండవ నియమాన్ని బట్టి $x = \frac{5}{3},\ y = \frac{4}{3}$ విలువలు తగ్గ, ఇచ్చిన ప్రమేయం గరిష్ట విలువను కలిగియుంటుంది. ఈ ప్రమేయం ఒక్క గరిష్ట విలువ కలిగియున్నది. దీనికి కనిష్ట విలువలు లేవు.

$\therefore$ ప్రమేయం గరిష్ట విలువ = $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2\times\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

8.2.2 ఆర్థిక అనువర్తన : ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ట, కనిష్ట విలువల ప్రక్రియనుపయోగించి సంపూర్ణ పోటీ మార్కెటు (Perfect Condition)లో ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు తమ లాభాన్ని గరిష్టం చేసుకోవడానికి, ఆ వస్తువులను ఏ స్థాయిలో ఉత్పత్తి చేస్తుందో మరియు ఒక ఏకస్వామ్యదారుడు (Monopoint) రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు తమ లాభాన్ని గరిష్టం చేసుకొనుటకు ఆ వస్తువులను ఏ ధరల దగ్గర అమ్ముతాడో తెలుసుకొనవచ్చును.

8.2.3 సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్ : ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు వాటి స్థాయిని నిర్ణయించటం సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులు x_1, x_2ను ఉత్పత్తి చేసి వాటిని వరుసగా p_1, p_2 ధరల దగ్గర అమ్ముతుందనుకుందాం. మరియు ఆ సంస్థ యొక్క ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం (Joint Cost Function) $T = T(x_1, x_2)$ అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ సంస్థ రాబడి ప్రమేయం (revenue function).

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

లాభము ప్రమేయం $\pi = R_1(x_1, x_2) - T(x_1, x_2)$ అవుతుంది. ఈ లాభం ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియం $\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 0, \frac{\delta\pi}{\delta x_2} = 0$.

ఈ రెండు సమీకరణాలను సాధించగా x_1, x_2 స్థాయి తెలుస్తుంది. రెండు వస్తువుల ఈ స్థాయిల దగ్గర లాభం గరిష్టం కావచ్చు. లేక కనిష్టం కావచ్చు. వస్తువుల ఉత్పత్తి ఏ స్థాయి దగ్గర ఉండే లాభం గరిష్టం అవుతుందో తెలుసుకోవడానికి, గరిష్ట కనిష్ట విలువ రెండవ తరగతి నియమాలను పరీక్షించాలి.

$\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}<0, \frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}<0, \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}\right)>\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1 x_2}\right)$ అయితే అవి లాభాన్ని గరిష్ఠం చేసే వస్తువు స్థాయిలు ఈ x_1, x_2 విలువలను లాభం ప్రమేయం πలో ప్రతిక్షేపించగా సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభం వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఒక సంస్థ రెండు వస్తువులను తయారుచేస్తుంది. దాని ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $T = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$ మరియు వాటి ధరలు వరసగా రూ.7, 20 అయితే లాభాలను గరిష్టం చేసే వస్తు స్థాయిలను కనుగొని సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభాన్ని కనుగొనుము.

సంస్థ యొక్క ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $T = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$

x_1, x_2ల ధరలు వరుసగా 7, 20 కాబట్టి సంస్థ యొక్క రాబడి ప్రమేయం $R = 7x_1 + 20x_2$

$\therefore$ లాభం ప్రమేయం $\pi = R - T = (7x_1 + 20x_2) - (x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2) = 7x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2$

ఈ ప్రమేయం యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(7x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2\right) = 0$$

$\therefore x_1 = 3,\ x_2 = 3$ దగ్గర లాభం గరిష్టం కావచ్చు లేదా కనిష్టం కావచ్చు. ఈ $x_1 = 2, x_2 = 3$ వస్తువుల దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుందో లేదో తెలుసుకొనడానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువల రెండవ తరగతి నియమం పరీక్షించాలి.

రెండవ తరగతి నియమం $\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}, \frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}$ మరియు $\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1 \cdot \delta x_2}\right)^2$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_1}\right) = \frac{\delta}{\delta x_1}(7 - 2x_1 - x_2) = 0 - 2(1) - 0 = -2 < 0$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta}{\delta x_2}(20 - x_1 - 6x_2) = 0 - 0 - 6 = -6 < 0$$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1, \delta x_2}\right)^2 = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta}{\delta x_1}(20 - x_1 - 6x_2) = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_2^2}\right) = -2 \times 6 = 12 > \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta x_1.\ \delta x_2}\right) = (-1)^2 = 1$$

$\therefore$ లాభం ప్రమేయం రెండవ తరగతి నియమం ప్రకారం

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 7(1) + 0 - 2x_1 - x_2(1) + 0 = 7 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 0 = 7 - 2x_1 - x_2 = 0 \text{ ---------(1)}$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(7x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2\right) = 0 + 20(1) - 0 - x_1(1) - 3\cdot 2x_2 = 20 - x_1 - 6x_2$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_2} = 20 - x_1 - 6x_2 = 0 \text{ -----------(2)}$$

సమీకరణాలను (1), (2) సాధించగా

$-2x_1 - x_2 = -7$ ---------- (1)

$2x_1 + x_2 = 7$ --------------(1)

$-x_1 - 6x_2 = -20$

$x_1 + 6x_2 = 20$ ----------- (2)

సమీకరణము (2)ని 2చే గుణించగా

$2x_1 + x_2 = 7$ ------------ (1)

$2x_1 + 12x_2 = 4$------------(2) × 2

$-11x_2 = -33$

$$x_2 = \frac{-33}{-11} = 3$$

x_2 విలువను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$2x_1 + 3 = 7 \Rightarrow 2x_1 = 7 - 3 = 4 \Rightarrow 2x_1 = 4$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$ దగ్గర గరిష్టం అవుతుంది.

సంస్థ యొక్క గరిష్ట లాభం $= 7\times 2 + 20\times 3 - 2^2 - 2\times 3 - 3(2)^2 = 14 + 60 - 4 - 6 - 12 = 52$

8.2.4 ఏకస్వామ్యదారుడు రెండు వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తున్నప్పుడు వాటి ధరలను నిర్ణయించడం : రెండు వస్తువులు x_1, x_2ను ఉత్పత్తి చేస్తున్న ఏకస్వామ్యదారుని ఉమ్మడి వ్యయ ప్రమేయం $c = c(x_1, x_2)$ అనుకుందాం. అప్పుడు ఏకస్వామ్యదారుని లాభ

ప్రమేయం $\pi = x_1p_1 + x_2p_2 - c(x_1, x_2)$ యొక్క గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_1} = 0, \frac{\delta\pi}{\delta x_2} = 0$$

$$\text{i.e., } x_1 + \left[p - \frac{\delta c}{\delta x_1}\right]\frac{\delta x_1}{\delta xp_1} + \left(p_2 - \frac{\delta c}{\delta x_2}\right)\frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 0 \text{----------------}(1)$$

$$x_2 + \left(p_1 - \frac{\delta c}{\delta x_1}\right)\frac{\delta x_1}{\delta p_2} + \left(p_2 - \frac{\delta c}{\delta x_2}\right)\frac{\delta x_2}{\delta p_2} = 0 \text{-------------------} (2)$$

ఈ రెండు సమీకరణములు సాధించగా p_1, p_2 విలువలు తెలుస్తాయి. ఈ ధరల వద్ద లాభం గరిష్ఠం అవుతుందో లేదో తెలుసుకొనడానికి గరిష్ఠ, కనిష్ఠ, విలువల రెండవ తరగతి నియమాలను పరీక్షించుకోవచ్చు. ఈ ధరల స్థాయి వద్ద

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial p_1^2} < 0, \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1 \cdot \delta p_2}\right)^2$$

అయితే అవి లాభాన్ని గరిష్ఠం చేసే ధరలు అవుతాయి. అప్పుడు ఏకస్వామ్యదారుడు ఈ ధరలనే తన వస్తువుకు నిర్ణయిస్తాడు.

ఉదా : ఒక ఏకస్వామ్యదారుడు x_1, x_2 అనే రెండు వస్తువులను వరుసగా స్థిరసగటు వ్యయం రూ.2, రూ.3, దగ్గర ఉత్పత్తి చేస్తున్నాడు. ఈ రెండు వస్తువుల డిమాండు ప్రమేయాలు $x_1 = 5(p_2 - p_1), x_2 = 32 + 5p - 10p_2$ అయితే ఏకస్వామ్యదారుని లాభాన్ని గరిష్ఠం చేసే ధరలను నిర్ణయించి అతని గరిష్ఠ లాభాన్ని కనుగొనుము.

ఏకస్వామ్యదారుడు x_1, x_2 అనే రెండు వస్తువులను వరుసగా స్థిరసగటు వ్యయం రూ.2, రూ.3 దగ్గర ఉత్పత్తి చేస్తున్నాడు. కాబట్టి అతని ఉమ్మడి ప్రమేయం

$$c = 2x_1 + 3x_2 \text{----------}(1)$$

ఈ రెండు వస్తువుల డిమాండ్ ప్రమేయములు

$$x_1 = 5p_2 - 5p_1, x_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2$$

$$\therefore \frac{\delta x_1}{\delta p_1} = -5, \frac{\delta x_1}{\delta p_2} = 5, \frac{\delta x_2}{\delta p_1} = 5, \frac{\delta x_2}{\delta p_2} = -10$$

ఏకస్వామ్యదారుని లాభం ప్రమేయం

$$\pi = p_1x_1 + p_2x_2 - (2x_1 + 3x_2) = (p_1 - 2)x_1 + (p_2 - 3)x_2 \text{--------------} (2)$$

లాభం ప్రమేయం గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల మొదటి తరగతి నియమం

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_1} = \frac{\delta}{\delta p_1}\left[(p_1 - 2)x_1 + (p_1 - 3)x_2\right] = (p_1 - 2)\frac{\delta x_1}{\delta p_1} + x_1 + (p_2 - 3)\frac{\delta x_2}{\delta p} + x_2(0)$$

$$=(p_1-2)\frac{\delta x_1}{\delta p_1}+x_1+(p_2-3)\frac{\delta x_2}{\delta p_1}=(p_1-2)(-5)+(5p_2-5p_1)+(p_2-3)\cdot 5$$

$$=-5p_1+10+5p_2-5p_1+5p_2-15=-10p_1+10p_2-5$$

$$=\frac{\delta\pi}{\delta p_1}=0$$

$$-10p_1+10p_2-5=0\text{-----------}\ (3)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_2}=\frac{\delta}{\delta p_2}\left[(p_1-2)x_1+(p_2-3)x_2\right]$$

$$=(p_1-2)5+(p_2-3)(-10)+32+5p_1-10p_2$$

$$=5p_1-10-10p_2+30+32+5p_1-10p_2=10p_1-20p_2+52$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta p_2}=0$$

$$-10p_1-20p_2+52=0\text{--------------}\ (4)$$

$$10p_1+10p_2=5$$
$$+10p_1-20p_2=-52$$

$$-10p_2=-47$$

విలువను (3) సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$-10p_1+10p_2(4.7)=5=-10p_1=5-47-10p_1=-42$$

$$p_1=\frac{-42}{-10}=4.2$$

$p_1=4.2,\ p_2=4.7$ ధరల దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుందో లేదో తెలుసుకోవడానికి, గరిష్ట, కనిష్ట విలువల తరగతి నియమాన్ని పరీక్షించాలి. రెండవ తరగతి నియమానికి సంబంధించిన అవకలన గుణకము

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2},\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2},\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1\delta p_2}\therefore\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2}=\frac{\delta}{\delta p_1}\left(\frac{\delta\pi}{\delta p_1}\right)=\frac{\delta}{\delta p_1}(-10p_1+10p_2-5)$$

$$=-10(1)+0+0=-10$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2}=\frac{\delta}{\delta p_2}\left(\frac{\delta\pi}{\delta p_2}\right)=\frac{\delta}{\delta p_1}(10p_1-20p_2+52)$$

$$=0-20(1)+0=-20$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1\ \delta p_2}=\frac{\delta}{\delta p_1}(10p_1-20p_2+52)=10$$

$\therefore p_1 = 4.2, p_2 = 4.7$ వద్ద $\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2} < 0, \frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2} < 0$

$$\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_2^2}\right) = (-10)(-20) = 200 > \left(\frac{\delta^2\pi}{\delta p_1\,\delta p_2}\right)^2 = 10^2 = 100$$

$\therefore$ ఒక ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువల రెండవ తరగతి నియమం ప్రకారం $p_1 = 4.2, p_2 = 4.7$ దగ్గర లాభం గరిష్టం అవుతుంది.

ఏకస్వామ్యదారుని లాభం గరిష్టం చేసే x_1 ధర రూ.**4.2**, x_2 ధర రూ.**4.7**

ఈ ధరల వద్ద డిమాండ్ $x_1 = 5(4.7) - 5(4.2) = 23.5 - 21.0 = 2.5$

$x_2 = 32 + 5(4.2) - 10(4.7) = 32 + 21 - 47 = 6$

$\therefore$ ఏకస్వామ్యదారుని గరిష్ట లాభం

$\pi = (42.2)(2.5) + (4.7-3)6 = (2.2)12.51 + (1.7)6 = 15.7$

8.3 అభ్యాసం :

ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు పాక్షిక అవకలన గుణకమును కనుగొనుము.

1. $z = \frac{5x^2}{5x - y + 4}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{5x-y+4}\right) = \frac{5x - y + 4\frac{d}{dx}\left(5x^2\right) - 5x^2\frac{d}{dx}(5x-y+4)}{(5x-y+4)^2}$$

$$= \frac{(5x-y+4)5.2x - 5x^2.5(1)}{(5x-y+4)^2} = \frac{(5x-y+4)\cdot 10x - 25x^2}{(5x-y+4)^2}$$

$$= \frac{50x^2 - 10xy + 40x - 25x^2}{(5x-y+4)^2} = \frac{50x^2 - 10xy + 40x}{(5x-y+4)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5x^2}{5x-y+4}\right) = \frac{x - y + 4\frac{d}{dx}\left(5x^2\right) - 5x^2\frac{d}{dx}(5x-y+4)}{(5x-y+4)^2} = \frac{5x + y + 4.0 - 5x^2.0 - 1 + 0}{(5x-y+4)^2}$$

$$\frac{0 + 5x^2}{(5x-y+4)^2} = \frac{5x^2}{(5x-y+4)^2}$$

2. $x_1 = p_1^{-1.7}\ p0.8$ మరియు $x_2 = P_1^{0.5}\, P_2^{0.2}$ లు రెండు వస్తువుల డిమాండు ప్రమేయాలు. పాక్షిక అవకలనము ద్వారా వస్తువుల పూరకాలో, పోటీతత్వ కనుగొనుము.

ఏ రకమైన వస్తువులు కొనుగొనుటకు పాక్షిక అంతర వ్యాకోచత్వము కనుగొనవలెను. అనగా

$$\frac{-\delta x_1}{\delta p_2}, \frac{\delta x_2}{\delta p_1}, \ x_1 = p_1^{-1.7} \ p_2^{0.8}, \frac{\partial x}{\delta P_2} = P_1^{-1.7} \ 0.8 \ P_2^{0.8-1}$$

$$= p_1^{-1.7} \cdot 0.8 \cdot p_2^{-0.2} = 0.8 \frac{1}{p_1^{0.7}} \cdot \frac{1}{p_2^{0.2}} > 0, \ x_2 = p_1^{0.5} \cdot p_2^{-0.2}$$

$$\frac{\delta x}{\delta p_1} = 0.5 p_1^{0.5-1} \cdot p_1^{-0.5} \ p_2^{-0.2} = 0.5 \frac{1}{p_1^{0.5}} \cdot \frac{1}{p_2^{0.2}} > 0$$

$\frac{\delta x_1}{\delta p_2}, \frac{\delta x_2}{\delta p_1}$ లు ధనాత్మకము కాబట్టి x_1, x_2 లు పోటీతత్వ వస్తువులు

3. $z = 3x^2 + xy - 2y^3$ అనే ప్రమేయము యొక్క సంపూర్ణ అవకలని కనుగొనుము.

సంపూర్ణ అవకలని $dz = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \delta x + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \delta y \cdot \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right) = 3.2x + y = (6x + y)$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(3x^2 + xy - 2y^3\right) = 0 + x(1) - 2.3y = x - 6y$$

$$\therefore dz = (6x + y)dx + (x - 6y)dy$$

4. ఈ క్రింది ప్రమేయము యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.

$$z = y^3 + y^2 - xy + x^2 + 4$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(y^3 + y^2 - xy + x^2 4\right) = -y + 2x$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0$$

$$2x - y = 0 \text{---------}(1)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(y^3 + y^2 - xy + x^2 + 4\right) = 3y^2 + 2y - x$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 = 3y^2 + 2y - x = 0 \text{---------}(2)$$

సమీకరణము (1) మరియు (2) సాధించగా $x = \frac{1}{4}, \ y = \frac{1}{2}$ వచ్చును.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta x}(2x - y) = 2 > 0$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(3y^2 + 2y - x\right) = 6y + 2$$

$y = -\frac{1}{2}$ దగ్గర

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 6 \times \frac{-1}{2} + 2 = -3 + 2 = -1 < 0$$

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ వ్యతిరేక గుర్తులు కలిగి ఉన్నవి కావున ప్రమేయము గరిష్ట, కనిష్ట విలువ కలిగి ఉండదు. కాని Saddle Point కలిగి ఉంటుంది.

5. $Q = LK + 0.2L^2 - 0.5^2$ అయిన శ్రమ, మూలధనము మరియు ఉపాంత ఉత్పత్తి కనుగొనుము.

శ్రమ యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి $= \frac{\delta Q}{\delta L} = \frac{\delta}{\delta L}\left(LK + 0.2L^2 + 0.8K^2\right)$

$= K + 0.2.2L + 0 = K + 0.4L$

మూలధనము యొక్క ఉపాంత ఉత్పత్తి $= \frac{\delta}{\delta K}\left(LK + 0.2L^2 + 0.8K^2\right)$

$= L + 0 + 0.8.2K^2 = L + 0.16K^2$

8.4 అవగాహన ప్రశ్నలు :

1. పాక్షిక అవకలన భావనను వివరించుము.
2. ఈ క్రింది ప్రమేయములకు పాక్షిక అవకలనము కనుగొనండి.

$(a)\, z = 7x^3 + xy + 2y^5 \qquad (b)\, z = \frac{5x}{6x - 7y} \qquad (c)\, z = \left(2x^2 + 6y\right)\left(5x - 3y^2\right)$

3. ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు రెండవ తరగతి, శుద్ధ మరియు పాక్షిక అవకలనాలను కనుగొనండి.

$(a)\, z = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (b)\, z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^2 - 2y^3 \qquad (c)\, z = \left(x^3 + 2y\right)^4$

4. ఈ క్రింది ఉత్పత్తి ప్రమేయములకు ఉపాంత ఉత్పత్తులను కనుగనండి.

$(a)\, Q = 0.5K^2 - 2KL + L^2 \quad (b)\, Q = x^2 - 2xy + 3y^2 \qquad (c)\, Q = 3x^2 + 5xy + 4y^2$

5. ద్విచలరాశి ప్రమేయపు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనే పద్ధతిని వివరింపుము.
6. $z = 6x^2 - 9x - 3xy - 7y + 5y^2$ అనే ప్రమేయమునకు, గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుగొనుము.

8.5 సంప్రదించు గ్రంథాలు :

1.	Alpha C. Chaiang	Fundamental methods of Mathematical Economics, Third Edition, Mc.Graw - Hill, International Editions
2.	R.G.B. Allen	Mathemaical Analysis for Economics, MAC Million
3.	Edward T. Bowling	Theory and Progress of Mathematics for Economics, Scyanm's artlin series, Mc-Graw Hill stock Company.

పాఠం -9

సమాకలనం

పాఠ్యాంశక్రమము:

9.0 ఉద్దేశాలు :

ఒక ప్రమేయము ఇస్తే దాని అవకలన గుణకాన్ని కనుగొనడాన్ని గూర్చి మీకిది వరకు నేర్చుకొన్నారు. దీనికి విపర్యయంగా ఒక ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకాన్నిస్తే, ఆ ప్రమేయాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఇలా ప్రమేయం యొక్క అవకలన గుణకాన్నిచ్చినపుడు ప్రమేయాన్ని కనుగొనే పద్ధతినే సమాకలనం అంటారు. ఈ భాగాన్ని చదివిన ఈ క్రింద విషయాలను అవగాహన చేసుకొనవచ్చు.

1. సమాకలన భావన, అనిశ్చిత సమాకలని, నిశ్చిత సమాకలని అంటే ఏమిటో తెలుసుకొనవచ్చును.

2. అనిశ్చిత సమాకలని నిర్వచనము, అనిశ్చిత సమాకలనిల నియమాలు, వాటిని కనుగొనే వివిధ పద్ధతులు తెలుసుకొనవచు. మరియు ఈ పద్ధతులనుపయోగించి, ఇచ్చిన ప్రమేయములను సమాకలనిలు కనుగొనే విధాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.

9.1 పరిచయం :

ఒక ప్రమేయంలో స్వతంత్ర చలరాశి అతి తక్కువ (negligibility small)గా మార్పు చెందినపుడు అస్వతంత్ర చలరాశిలో వచ్చే మార్పు ఆ ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము తెలియజేస్తుందని మీరిది వరకే తెలుసుకొన్నారు. కాబట్టి ఇచ్చిన ప్రమేయములని స్వతంత్ర చలరాశి అతి తక్కువ మార్పు చెందినపుడు, అస్వతంత్ర చలరాశి ఎంత మార్పు చెందుతుందో, ఆ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయడము ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు యొక్క ధర ఒక యూనిట్ మార్పు చెందితే, దాని డిమాండ్‌లో ఎంత మార్పు వస్తుంది అనే విషయము ఆ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయటం ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చు. అలాగే ఒక వినియోగదారుని ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు అతని ఉపాంత ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు. అలాగే ఒక వినియోగదాదరుని ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు అతని ఉపాంత ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.

అదే విధంగా ఒక వస్తువు మొత్తం వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు దాని ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము తెలిసినపుడు మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత ప్రయోజన ప్రమేయము తెలిసినపుడు ప్రయోజన ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత ఉత్పత్తి ప్రమేయము తెలిసినపుడు ఉత్పత్తి ప్రమేయాన్ని తెలుసుకొనవలసి ఉంటుంది. దీనినే సాధారణముగా చెప్పాలంటే ఒక ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము ఇచ్చినపుడు ఆ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుట, ఇలా ప్రమేయము యొక్క అవకలన గుణకము ఇచ్చినపుడు ప్రమేయాన్ని కనుగొనే పద్ధతినే సమాకలనము అంటారు.

9.2 సమాకలని భావన :

సమాకలన భావనను రెండు వేరు వేరు పద్ధతులలో వివరించవచ్చు. ఇలా రెండు పద్ధతులలో వివరించబడిన సమాకలనిలు వేరు వేరు గుణములు. వేరు వేరు అనువర్తనలు కలిగియుంటాయి. ఒక పద్ధతిలో సమాకలనము, అవకలన తిరోగమ్య (reserve) పద్ధతిగా భావించబడుతుంది. ఇలా సమాకలనాన్ని అవకలనపు తిరోగమన పద్ధతిగా పరిగణించి, నిర్వచింపబడిన సమాకలనిని అనిశ్చిత సమాకలని (indefinite integral) అంటారు. దీనికి ఒక నిర్దిష్టమైన సంఖ్యా విలువ వుండదు. అనిశ్చిత సమాకలని, ఒక ప్రమేయం అవకలన గుణకము నిచ్చినపుడు ఆ ప్రమేయాన్నిస్తుంది. రెండవ పద్ధతిలో సమాకలని, ఒక సంకలిత సమాసము (summation expression) యొక్క అవధి (limit) పరిగణింపబడుతుంది. ఇలా ఒక సంకలిత సమాసం యొక్క అవధిగా పరిగణించి నిర్వచింపబడిన సమాకలనిని నిశ్చిత సమాకలని(definite integral) అంటారు.

9.3 అనిశ్చిత సమాకలని :

అనిశ్చిత సమాకలని నిర్వచనం : F(x) అనే ప్రమేయపు అవకలన గుణకము f(x) అయితే $\left[\text{i.e. } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ or } dF(x) = f(x)dx\right]$, F(x)ను x దృష్ట్యా f(x) సమాకలని అంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో $F(x) = \int f(x)dx$ అని వ్రాస్తారు. ఈ సంకేతం $\int f(x)dx$ అనే మూడు భాగాలు కలిగి ఉంది. నీటిలోని $\int$ భాగం సమాకలనం గుర్తును సూచిస్తుంది. $f'(x)$ భాగాన్ని సమాకల్యము (integral) అంటారు. ఇది సమాకలనము చేయవలసిన ప్రమేయము. dx భాగము, సమాకలనము x దృష్ట్యా చేయాలని సూచిస్తుంది.

$\int f(x)dx = F(x) + C$ అవుతుంది. ఈ 'C'ని సమాకలన స్థిరరాశి అంటారు. పైన చూపిన విధంగా, సమాకలనము చేసేటప్పుఉడు స్థిరాస్తిని అన్ని ప్రమేయాలకు కలపవలెను. ఎందుకంటే అవకలనము చేసినపుడు ఇచ్చిన ప్రమేయానికి స్థిరరాశిని కలుపవలెను.

కొన్ని ప్రామాణిక ప్రమేయాల సమకలనీలు : ఘాత ప్రమేయము x^n ఘాతిక ప్రమేయము e^x, సంవతర్గమాన ప్రమేయము log xల అవకలన గుణకాలను మీరిదివరకే తెలుసుకున్నారు. ఈ ప్రమేయాల యొక్క అవకలన గుణకములు.

$$\text{(i) } \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\ x^{n-1} \qquad \text{(ii) } \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad \text{(iii) } \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

ఘాత ప్రమేయము $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ యొక్క అవకలన గుణకము $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$ వీటిని బట్టి, ఘాత ప్రమేయము x^n ఘాతిక ప్రమేయము e^x, ప్రమేయము $\frac{1}{x}$ల యొక్క సమాకలనిలు.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ 2. $\int e^x dx = e^x + c$ 3. $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$ అవుతాయి.

సమకలనిల నియమాలు : f(x) ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయి K ఒక స్థిరరాశి అయినప్పుడు $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$ అవుతుంది.

$f(x), g(x)$లు రెండు ప్రమేయాలైతే,

$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ అవుతుంది.

ఉదాహరణలు :

1. $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} = \frac{x^7}{7} + C$ 2. $\int 3.x^7 dx = 3\int x^7 dx = 3\frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{3}{8}x^8 + c$

3. $\int 10\sqrt{x}dx = 10\int x^{1/2}dx = 10 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}+1} + c = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{20}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$

4. $\int \sqrt{x^5}dx = \int (x^5)^{1/2} dx = \int x^{5/2} dx \backslash \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \frac{2}{7}x^{1/2} + c$

5. $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$

6. $\int (x^3 + x + 1) dx = \int x^3 dx + \int x dx + \int x dx$

$$= \left(\frac{x^2+1}{3+1} + c_1\right) + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2 + x + c_3$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + c_1 + c_2 + c_3$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

7. $\int (3x^{-1} + 4x^2 - 3x + 8) dx$ ను x దృష్ట్యా సమకలనం చేయండి.

$= 3\int x^{-1} dx + 4\int x^2 - 3\int x dx + \int 8 dx$

$$= 3\int \frac{1}{x}dx + 4\int x^2dx - 3\int xdx + \int 8dx$$

$$= 3\cdot \log x + 4\frac{x^{2+1}}{2+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + 8\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$= 3\log x + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 8x$$

8. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$ ను x దృష్ట్యా అవకనం చేయండి?

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int\left(x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\int x^3dx - 3\int xdx + 3\int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{x^3}dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3\log x - \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 3\log x - \frac{x^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 3\log x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

అభ్యాసము :

1. $\int x^{20}dx$ 2. $\int 10\cdot x^5dx$ 3. $\int \sqrt[5]{x^6}dx$ 4. $\int\left(x^3-3x^2-2x+1\right)dx$

5. $\int\left(5x^2+4e^{2x}+\frac{3}{x}+2\right)dx$ 6. $\int\left(x^3-\sqrt{x}\right)dx$

9.4 సమాకలనిలను కనుగొనే కొన్ని పద్ధతులు :

ఇచ్చిన ప్రమేయము, ఒక ప్రమేయాన్ని ఒక స్థిర రాశిచే గుణించగా వచ్చినది గానీ లేక రెండు ప్రమేయాలను కలుపగా వచ్చినది గాన అయితే, దాని సమాకలనిని పైన చెప్పిన సమాకలనిల నియమాలనుపయోగించి కనుగొనవచ్చు. ఇలా కాకుండా, ఇచ్చిన ప్రమేయము, రెండు ప్రమేయాల లబ్ధము లేక వాటి విభక్తము మొదలగు సంకీర్ణసమానమైతే, పైన చెప్పబడిన నియమాల సహాయంతో దాని సమాకలనిని కనుగొనుట కష్టము. అటువంటి ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుటకు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి, విభా సమాకలన పద్ధతి వంటి కొన్ని ప్రత్యేక పద్ధతులు కలవు. వాటినుపయోగించి, ఇచ్చిన ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుటను తెలుసుకుందాం.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి (Substitution method**) :**

1. ఇచ్చిన ప్రమేయము రెండు ప్రమేయాల లబ్ధమయి వాటిలో ఒకటి రెండవదాని అవకలన గుణకమయినపుడు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి సమాకలనిని కనుగొనవచ్చు. ఈ పద్ధతి క్రింద చూపబడిన విధముగా ఉంటుంది.

ఇచ్చిన ప్రమేయము $f'(x), f(x)$ అనుకుందాం. దీనిలో $f(x)$ యొక్క అవకలన గుణకము $f'(x)$. ప్రమేయము $f'(x)\cdot f(x)$ యొక్క సమాకలని.

$\int f'(x)\, f(x) dx$

ఇపుడు $f(x)=t$ అనుకుందాం. (ఇచ్చిన లబ్ధంలో ఏ ప్రమేయం అవకలన గుణకము రెండవ ప్రమేయమవుతుందో దానిని t అనుకోవలెను). దీనిని అవకలనం చేయగా $f'(x)dx = dt$, మరియు $dx = \frac{dt}{f'(x)}$ అవుతుంది. వీటిని

$\int f'(x)\, f(x) dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int f'(x) f(x) dx = \int f'(x) t \cdot \frac{dt}{f'(x)} = \int t\ dt$ అవుతుంది. కాని $\int t\ dt = \frac{t'+1}{1+1} + c = \frac{t^2}{2} + c$

$\therefore t$ ని తిరిగి రూపంలోకి మార్చగా, $\int f'(x) f(x) dx = \frac{\left[f(x)\right]^2}{2} + c$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 : $\int 2x\left(x^2+1\right)dx$ కనుగొనుము.

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో $\left(x^2+1\right)$ యొక్క అవకలన గుణకము $2x$ కాబట్టి $x^2+1=t$ అనుకుందాం. అపుడు $2xdx = dt$ మరియు $dx = \frac{dt}{2x}$ అవుతుంది. వీటిని $\int 2x\left(x^2+1\right)dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int 2x\left(x^2+1\right)dx = \int 2x \cdot t \frac{dt}{2\cdot x} = \int t$ అవుతుంది.

కాని $\int tdt = \frac{t^{1+1}}{1+1} + c = \frac{t^2}{2} + c$

$\therefore t$ ని తిరిగి, x రూపములోకి వ్రాయగా $\int 2x\left(x^2+1\right)dx = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2} + c$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 2 : $\int 4x^3\left(x^4+2\right)^{80} dx$ కనుగొనుము. ఇచ్చిన ప్రమేయంలో x^4+2 యొక్క అవకలన గుణకము $4x^3dx = dt$

మరియు $dx = \frac{dt}{4x^3}$ అవుతుంది. వీటిని $\int 4x^3\left(x^4+2\right)^{80}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా $\int 4x^3\left(x^4+2\right)dx = \int 4x^3 \cdot t^{80} \cdot \frac{dt}{4x^3}$

$$= t^{80}dt = \frac{t^{81}}{81} + c$$

$\therefore$ t ని తిరిగి రూపంలో వ్రాయగా

$$\int 4x^3\left(x^4+2\right)^{80}dx = \frac{\left(x^4+2\right)^{81}}{81} + c$$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 3 : $\int 8x \cdot e^{2x^2+1}dx$ కనుగొనండి.

ఇక్కడ $2x^2+1 = t$ అనుకుందాం, అపుడు 4x dx=dt

$\therefore dx = \frac{dt}{4x}$ అవుతుంది.

వీటిని $\int 8x \cdot e^{2x^2+1}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int 8x\ e' \cdot \frac{dt}{4x} = \int 2e'dt = 2\int e'dt$ అవుతుంది. కాని $\int e'dt = e' + c$

$\therefore 2\int e'dt = 2e' + c$ $\therefore$ t ని తిరిగి వ్రాయగా $\int 8x \cdot e^{2x^2+1}dx = 2e^{2x^2+1} + c$ వస్తుంది.

4. $\int (x-1)\left(x^2-2x+3\right)^{n/2}dx$ కనుగొనుము.

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో x^2-2x+3 యొక్క అవకలన గుణకము $(2x-2)dx = dt$ మరియు $dx = \frac{dt}{(2x-2)}$ అవుతుంది.

దీనిని $\int (x-1)\left(x^2-2x+3\right)^{n/2}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\therefore \int (x-1)\left(x^2-2x+3\right)^{n/2}dx = \tfrac{1}{2}\int t^{n/t}dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{n+1}}{\frac{n}{2}+1} + c$$

$$=\frac{\left(x^2-2x+3\right)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}+c$$

II. ఇచ్చిన ప్రమేయము, రెండు ప్రమేయాల విభక్తమయి వాటిలో హారము యొక్క అవకలన గుణకము లవము అయితే ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి ఆ ప్రమేయాన్ని సమాకలనము చేయవచ్చు. ఈ పద్ధతి ఈ క్రింద చూపబడిన విధంగా ఉంటుంది.

ఇచ్చిన ప్రమేయము $\frac{f'(x)}{f(x)}$ అనుకుందాం. దాని సమాకలని $\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ ఇక్కడ $f(x) = t$ అనుకుందాం. అపుడు $f'(x)dx = dt$ మరియు $dx=\frac{dt}{f'(x)}$ అవుతుంది. వాటిని $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{f'(x)}{t}\cdot\frac{dt}{f'(x)}=\int\frac{1}{t}dt \text{ కాని } \int\frac{1}{t}dt=\log t+c$$

$\therefore$ t ని తిరిగి x రూపంలో వ్రాయగా

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\left[f(x)\right]+c$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ : 1. $\frac{2x}{1+x^2}dx$

ఇచ్చిన ప్రమేయంలో హారము యొక్క అవకలన గుణకము లవము అవుతుంది. కాబట్టి $1+x^2=t$ అనుకుందాం మరియు $dx=\frac{dt}{2x}$ అవుతుంది. వాటిని $\int\frac{2x}{1+x^2}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\frac{2x}{1+x^2}dx=\int\frac{2x}{t}\cdot\frac{dt}{2t}=\frac{1}{t}dt$ కాని $\int\frac{1}{t}dt=\log t+c$ $\therefore$ t ని x రూపంలో వ్రాయగా

$$\therefore\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\log(1+x)^2+c$$

ఉదాహరణ : 2 $\int\frac{1}{2x+1}dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $(2X+1)=t$ అనుకుందాం. అప్పుడు $2dx=dt$ $\therefore dx=\frac{dt}{2}$ వీటిని $\int\frac{1}{2x+1}dx$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$\int\frac{1}{2x+1}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\log t+c$ అవుతుంది.

$\therefore$ t ని x రూపంలో వ్రాయగా $\int \frac{1}{2x+2} dx = \frac{1}{2}\log(2x+1)+c$

9.5 అభ్యాసము :

ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

1. $\int (1+6x)^2 \, dx$

విభాగ సమాకలన పద్ధతి : u, v లు xలో ప్రమేయాలైతే, అవకలన లబ్ద నియమము ప్రకారము d(u v) = u dv+v du అవుతుంది.

$$\therefore \int d(u\ v) = \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \right) = \int u\frac{dv}{dx} + \int v\frac{du}{dx} \text{ i.e. } u\,v = \int u\frac{dv}{dx} + \int v\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\frac{du}{dx}$$

దీనినే విభాగ సమాకలన నియమము అని అంటారు.

ఈ నియమమునుపయోగించి సమాకలనిలను కనుగొనుటకు ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని udv అనుకొనవలెను. అనగా, ఇచ్చిన ప్రమేయంలో ఒక భాగాన్ని u, మిగిలిన భాగాన్ని dv అనుకొనవలెను. అలా dv అనుకొనబడిన భాగము సులువుగా సమాకలనము చేయుటకు వీలుపడాలి. ఎందుకంటే dv నుండి v కనుగొనవలసి ఉన్నది.

ఉదాహరణ : 1 -

$$\int x \cdot e^x dx = x\left[\int e^x dx\right] - \int\left[\int e^x\ dx\right]\left[\frac{d}{dx}(x)\right] \cdot dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x \cdot 1 \cdot dx$$

$$= x\,e^x - e^x + x$$

$$= e^x\,(x-1) + k$$

2. $\int x^2 \cdot e^x dx$ లను కనుగొనుము.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2\left[\int e^x dx\right] - \left[\int e^x dx\right]\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \cdot dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - \int\left[e^x\right] \cdot 2x\ dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\left[\int x\,e^x dx\right]$$

$$= x^2 - e^x - 2\left[e^x(x-1)dx\right] + k$$

$$= e^x\left[x^2 - 2(x-1)\right] + k$$

$$= e^x\left[x^2 - 2x - 2\right] + k$$

3. $\int \log x\, dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $u = \log x$, $v = 1\, dx$ అవుతుంది.

విభాగ సమాకలన నియమం ప్రకారం

$$\int \log x dx = \log x\left[\int 1 dx\right] - \left[\int 1 dx\right]\left[\frac{d}{dx}\log x\right]dx$$

$$= \log x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x\log x - \int 1 dx$$

$$= x\log x - x + k$$

$$= x(\log x - x) + k$$

$$= x(\log x - \log e) + k \text{ or}$$

$$= x\log\left(\frac{x}{e}\right) + k$$

4. $\int x(x+1)^{1/2} dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int x(x+1)^{1/2} dx = x\left[\int (x+1)^{1/2} dx - \left[\int (x+1)^{1/2} dx \cdot \frac{d}{dx}(x) dx\right]\right]$$

$$= x\left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+4x\right]-\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+4x$$

$$= x\cdot\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+4x-\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}dx+\int 4dx$$

$$= x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+4x-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

5. $\int x(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ ను కనుగొనుము.

ఇక్కడ $u = x,\ dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ అనుకొనుము.

అపుడు $du = dx, \int dv = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$v = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ అవుతుంది.

$\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ లో $(x+1) = t$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}, (x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1 \ \therefore v = \frac{2}{3}[x+1]^{\frac{3}{2}}+c_1$ అవుతుంది.

$\therefore t$ ని x రూపములో వ్రాయగా,

$$\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = x\left[\frac{2}{3}\int(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1\right]-\int\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1dx$$

$$=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1x = -\left[\frac{2}{3}\int(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1\right]-\int\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1dx$$

$$=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1x-\left[\frac{2}{3}\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx+\int c_1\ dx\right]$$

$\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ ను పైన చెప్పినట్లే ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతినుపయోగించి సమాకలనము చేయగా,

$\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c_2$ అవుతుంది.

$$\therefore \int x(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_1x-\frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c_2\right]-c_1x+c_3$$

$$=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}c_2+c_3$$

$$=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

9.5 నిశ్చిత సమాకలని :

నిర్వచనము : y = f(x) ఒక ఏకమూల్య ప్రమేయము, మరియు అది x = a నుండి x = b వరకు గల x అన్ని విలువల వద్ద అవిచ్ఛిన్నముగా ఉంటుందని అనుకుందాం. అంతరము [a, b] ను $a=x_1, x_2,\cdots,x_n, x_{n+1}=b$ బిందువులతో, n భాగాలుగా విభజించి $f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+f(x_n)(x_{n+1}-x_n)$ అనే మొత్తమును రూపకల్పన చేస్తాము. ఈ మొత్తమునే సంకేత రూపములో $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ అని వ్రాయవచ్చు. అనంతరము విభజించిన భాగములు సంఖ్య 'n' హెచ్చుతుంటే, భాగాల యొక్క పొడవు తగ్గుతుంటుంది. ఈ సంఖ్య n అనంతరము చేరుకుంటే $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ అనే మొత్తము ఒక ఖచ్చితమైన విలువకు చేరుకుంటుంది. ఆ విలువనే a నుండి b కి f(x) యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటారు. దీనిని సంకేత రూపములో $\int_a^b f(x)dx$ అని వ్రాస్తారు. ఇక్కడ a ని సమాకలని యొక్క దిగువ అవధి, మరియు bని ఎగువ అవధి అని అంటారు.

నిర్వచనము : $\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x)(x_{i+1}-x_i)$

నిశ్చిత సమాకలని వివరణ : ప్రమేయము F(x) యొక్క అవకలన గుణకము f(x) అయితే $\int f(x)dx=F(x)+c$ అవుతుందని మనకు తెలుసు. దీనికి ఒక ప్రత్యేకమైన విలువలేదు. x చలరాశి a, b, (a < b) అనే రెండు విలువలు తీసుకుంటే x = a వద్ద సమాకలని విలువ F(a)+c మరియు x=b వద్ద సమాకలని విలువలో నుండి x = a వద్ద సమాకలని విలువ తీసివేయగా

[F(b)+c]-[F(a)+c] = F(b) - F(a) అవుతుంది.

ఇది x విలువలపై గాని c విలువలపైగాని ఆధారపడకుండా ఉండే ఒక ప్రత్యేకమైన విలువ. దీనిని a నుండి bకి f(x) యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటారు.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ఉదాహరణ : 1. $\int_0^2 \left(2-3x+4x^2\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int \left(2-3x+4x^2\right)dx = \int_0^2 2xdx - 3\int_0^2 xdx + 4\int_0^2 x^2dx$$

$$= \int_0^2 \frac{2x}{1} - \int_0^2 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + \int_0^2 4\frac{x^{2+1}}{2+1}$$

$$= \left|2x - \frac{3x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3}\right|_0^2$$

$$= \left[2(2) - \frac{3(2)^2}{2} + \frac{4(2)^3}{3}\right] - \left[2(0) - \frac{3(0)^2}{2} + 4\frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$= \left[4 - 6 + \frac{32}{3}\right] - 0$$

$$= \left[\frac{12-18+32}{3}\right]$$

$$= \frac{26}{3}$$

2. $\int_1^e \frac{1+\log x}{x}dx$ ను కనుగొనుము.

ముందుగా అవకలనము చేసి తరువాత వాటికి పరిమితులు ఏర్పరచాలి.

$$\int \frac{1+\log x}{x} dx = \int \frac{1}{2} dx + \left[\int (\log x)\frac{1}{x} dx \text{ ఇక్కడ } f(x) = \log x \; f(x) = \frac{1}{x}\right.$$

$$= \log x + \frac{1}{2}\log x^2 + x$$

అయితే $\int\limits_{e} \frac{1+\log x}{x} dx = \log x + \frac{1}{2}\log x^2 + x$

$$= \int_1^e \frac{1+\log x}{x} x \; dx = |\log x|_1^e + \frac{1}{2}|\log x^2|_1^e$$

$$= \left[(\log e) - \log(1)\right] + \frac{1}{2}\left[(\log e)^2 - \log i\right]$$

$$= [1-0] + \frac{1}{2}\left[(1)^2 - 0\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3. $\int_1^5 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_1^5 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int_1^5 x dx + \int_1^5 \frac{4}{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 + 4\int_1^5 x^{-2} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 + 4\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^5$$

$$= \left[\frac{5^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] + 4\left[\frac{5^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right] = \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right] + 4\left[1 - \frac{1}{5}\right] = \frac{24}{2} - 4\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= 12 - \frac{16}{5} = \frac{44}{5}$$

4. $\int_0^2 \frac{5}{2+x} dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_0^2 \frac{5}{2+x}dx = 5\int_0^2 \frac{1}{2+x}dx = 5\left[\log(2+x)_0^2\right] = 5\left[\log(2+2)-\log(2+0)\right]$$

$$= 5\left[\log 4 - \log 2\right] = 5\log\left[\frac{5}{2}\right] = 5\log 2$$

4. $\int_0^1 x\left(x^2+6\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_0^2 \frac{5}{2+x}dx = 5\int_0^2 \frac{1}{2+x}dx = 5\left[\log(2+x)_0^2\right] = 5\left[\log(2+2)-\log(2+0)\right]$$

$$= 5\left[\log 4 - \log 2\right] = 5\log\left(\frac{4}{2}\right) = 5\log 2$$

4. $\int_0^1 x\left(x^2+6\right)dx$ కనుగొనుము.

$$\int_0^1 x\left(x^2+6\right)dx = \left[\frac{\left(x^2+6\right)^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\left(1^2+6\right)^2}{4} = \frac{\left(0^2+6\right)^2}{4}$$

$$= \frac{49}{4} - \frac{36}{4} = \frac{13}{4}$$

6. $\int_1^3 \left(e^{2x}+e^x\right)dx$ ను కనుగొనుము.

$$\int_1^3 \left(e^{2x}+e^x\right)dx = \int_1^3 e^{2x}dx + \int_1^3 e^x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^3 + \left[e^x\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[e^6 - e^2\right] + \left[e^3 - e^1\right] = \frac{e^6 - e^2}{2} + e^3 - e^1 = \frac{e^6 - e^2 + 2e^3 - 2e^1}{2}$$

$$= \frac{e^6 - 2e^3 - e^2 - 2e^1}{2}$$

7. $6y = x^2$ రేఖ క్రింద x = 1 మరియు x = 3 బిందువుల మధ్య నుండే వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

$y = x^2$ రేఖ క్రింద x = 1 మరియు x =3 బిందువుల మధ్య నుండే వైశాల్యము $\int_1^3 x^2 dx$ అవుతుంది.

$$\therefore \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

అభ్యాసము : ఈ క్రింద నీయబడిన నిశ్చిత సమాకలనిలను కనుగొనుము.

1. $\int_1^3 \sqrt[3]{x} dx$ 2. $\int (x^3 - 6x^2) dx$ 3. $\int_{-1}^{1} (10x^2 + 6x + 2) dx$ 4. $\int_4^3 x^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx$

5. $\int_0^2 (x-1)(x^2 + x + 1) dx$

6. $y = 9 - x^2$ రేఖ క్రింద x = 1 వద్ద మరియు x = 3 బిందువుల మధ్యనుండే వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

9.6 అభ్యాసం :

1. $\int (x^3 - x + 1) dx \quad = \int x^3 dx - \int x\, dx + \int 1\, dx$

$$= \frac{x^4}{4} + c_1 - \frac{x^2}{2} + c_2 + x + c_3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + c$$ ఇక్కడ $(c_1 - c_2 - c_3) = c$ అవుతుంది.

2. $\int e^x + \frac{1}{x^3} dx = \int e^x dx + \frac{1}{x^3} dx = \int e^x dx + \int x^{-3} dx$

$$e^x + c + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c_2 = e^x - \frac{x^{-2}}{2} + c_1 + c_2 = e^x - \frac{1}{2}x^{-2} + c$$

$e^x - \frac{1}{2x^2} + c$ (ఇక్కడ $c_1 + c_2 = c$ అవుతుంది).

3. $\int (5x+7)^8 dx$

ఇక్కడ $t = 5x + 7$ అనుకుందాం. $\therefore dt = 5dx = dx = \frac{dt}{5}$

$$\therefore \int (5x+7)^8\, dx = \int t^8 \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^8 dt = \frac{1}{5}\left[\frac{t^{8+1}}{8+1}\right] + c$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{t^9}{9} + c = \frac{1}{45}t^9 + c$$

మరల t ని x రూపంలో వ్రాయగా

$$\int (5x+8)^8\, dx = \frac{1}{45}(5x+7)^9 + c$$

4. $\int x^8 \log x dx$

$u = \log x$ & $v = x^n$ అనుకుందాం.

$$\therefore \int x^n \log x\ dx = \int \log x \cdot x^n dx = \log x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\log x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\log x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\log x - \frac{1}{n+1}\right] + c$$

5. $$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= [\log x]_1^2 - [\log(x+1)]_1^2 = [\log 2 - \log 1] - [\log 3 - \log 2]$$

$$= 2\log 2 - \log 3\ \ [\sin u\ \log 1 = 0]$$

6. $$\int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}} dx$$

ఇక్కడ $2x^3+x-2$ అనుకుందాం.

$\therefore (6x^2+1)dx = dt$

$$\therefore \int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}}dx = \int \frac{6x^2+1}{\sqrt{t}}\ \frac{dt}{6x^2+1} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$ అవుతుంది.

$$= \frac{t^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$= 2t^{1/2} + c$ t ని మరల x రూపంలో వ్రాయగా

$$\int_2^3 \frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^3+x-2}}dx = 2\left[\sqrt{2x^3+x-2}\right]_2^3$$

$$= 2\left[\sqrt{54+3-2} - \sqrt{16+2-2}\right] = 2\left[\sqrt{55}-4\right] = 6.88$$

7. $\int_{-1}^{+1}(4-3x)^5\,dx$

$4-3x = t$ అనుకుందాం.

$-3\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{3}dt$ అవుతుంది.

$$\therefore \int (4-3x)^5\,dx = \int t^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)dt = \frac{1}{3}\int t^5 dt$$

t ని మరల x రూపంలో వ్రాయగా

$$-\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^6}{6} + c \quad \int_{-1}^{+1}(4-3x)^5\,dx = -\left[\frac{(4-3x)^6}{18} + c\right]$$

$$= -\frac{1}{18}\left[1^6 - 7^6\right] = 6549.61$$

8.. $\int_{-2}^{3}\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx$

$$\int\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx = \int dx - 2\int \frac{1}{x^5\,dx}$$

$$= x - 2\frac{x^{-5}+1}{-5+1} + c = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^4} + c$$

$$\int_{-2}^{3}\left(1-\frac{2}{x^5}\right)dx = \left[x + \frac{1}{2x^4}\right]_{-2}^{3} = 4.975$$

9.7 అవగాహన ప్రశ్నలు :

ఈ క్రింది సమాకలనిలను కనుగొనుము.

1. $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$
2. $\int x \cdot \log x \cdot dx$
3. $\int \frac{5x}{(x-1)^2}\,dx$
4. $\int x^2 e^{2x}\,dx$
5. $\int \left(2x^5 - 3x^{1/4}\right)dx$
6. $\int \left(6e^{3x} - 8e^{-2x}\right)dx$
7. $\int x^4\left(2x^5-5\right)^4 dx$
8. $\int \frac{x^2}{\left(4x^2+7\right)^2}\,dx$
9. $\int \frac{3x^2+2}{4x^2+8x}\,dx$
10. $\int 15x\,(x+4)^{3/2}\,dx$
11. $\int_1^3 \left(x^3+x+6\right)dx$
12. $\int_1^2 x^2\left(x^3-5\right)^2 dx$
13. $\int_1^3 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$
14. $\int_1^3 3x^2 e^{2x^2+1}\,dx$
15. $\int_1^3 5x \cdot e^{x+2}$
16. $\int_1^3 5x.e^{x-2}$

9.8 సంప్రదింపు గ్రంథాలు :

1. R.G.D. Allen : Mathematical Analysis for Economics (MAC Million India Limited, 1986 Chapter - XV)
2. Alpha C. Chaing : Fundamental Methods of Mathematical Economics Third Edition, Mc GrawHill International Editions Chapter - Xiii
3. Edward T. Dowling : Mathematics for Economists Schaum's Outline Series in Economics. Mc Graw Hill Book Company, Chapter, 16 & 17.
4. G.S. Monga : Mathematics and Statistics for Economics Vikas Publishing House Pvt. Ltd., Chapter - ii

పాఠం - 10 # సమాకలనం - ఆర్థిక అనువర్తనాలు

పాఠ్యాంశక్రమము:

10.0 ఉద్దేశాలు :

ముందు పాఠం నందు సమాకలనము అంటే ఏమిటి? సమాకలన భావనలు, అనిశ్చిత సమాకలనం అంటే ఏమిటి? వీటిని కనుగొనే పద్ధతులు చదివియున్నాము. ఈ పాఠం నందు ఈ క్రింద విషయాలను అవగాహన చేసుకొనవచ్చు.

1. అనిశ్చిత సమాకలని నిర్వచనము, అనిశ్చిత సమాకలనిల నియమాలు, అనిశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియను ఆర్థిక శాస్త్రములోని కొన్ని సమస్యలకు అనువర్తింపజేయడాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.

2. నిశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియనుపయోగించి వినియోగదారుని మిగులును, ఉత్పత్తిదారుని మిగులును కనుగొనడాన్ని గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చు.

10.1 అనిశ్చిత సమాకలనిలు - ఆర్థిక అనువర్తన :

అనుశ్చిత సమాకలనిల ప్రక్రియనుపయోగించి, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఇచ్చినపుడు మొత్తం వ్యయ ప్రమేయాన్ని ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి విచ్చినపుడు వినియోగ ప్రమేయాన్ని, ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తినిచ్చినపుడు పొదుపు ప్రమేయాన్ని కనుగొనుటకు తెలుసుకుందాం.

వ్యయ ప్రమేయం : ఒక సంస్థ యొక్క ఉత్పత్తికి, ఉత్పత్తి వ్యయానికి గల సంబంధాన్నే వ్యయ ప్రమేయం అంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో $T = f(x)$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఇక్కడ T మొత్తం ఉత్పత్తి వ్యయాన్ని x ఉత్పత్తిని చూస్తున్నవి. మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయం వస్తుందని మీరిదివరకు తెలుసుకున్నారు. అనగా, ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T' = \frac{dT}{dx}$ అవుతుంది.

కాబట్టి మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము, $T = \int T'\, dx$ ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాన్ని సమాకలనం చేయగా మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ : 1. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయాలు $MC = 100 - 10x + 0.1x^2$. x ఉత్పత్తి పరిమాణం అయితే మొత్తం వ్యయం, సగటు వ్యయం మరియు స్థిర వ్యయము 500 అయినప్పుడు దాని మొత్తం వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

సంస్థ యొక్క ఉపాంత ప్రయోజనము = $100 - 10x + 0.1x^2$

మొత్తం వ్యయ ప్రమేయము TC = $\int MCdx$

$$= \int \left(100 - 10x + 0.1x^2\right) dx$$

$$= 100x - 5x^2 + \frac{0.1}{3}x^3 + k$$

ఇక్కడ స్థిర వ్యయం రూ.500

TC వద్ద $x = 500$

$$TC = 100x - 5x^2 + \frac{0.1}{3}x^3 + 500$$

సగటు వ్యయము = $\frac{TC}{x} = \frac{C}{x}$

$$= \frac{100x - 5x^2 + \frac{0.1}{3}x^3 + 500}{x}$$

$$= 100 - 5x + \frac{0.1}{3}x^2 + \frac{500}{x}$$

ఉదాహరణ : ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T' = 25 + 30x - 9x^2$ మరియు స్థిర వ్యయము 55 అయినపుడు దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T' = 25 + 30x - 9x^2$

మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము $T = \int \left(25 + 30x - 9x^2\right) dx = \int 25\,dx + \int 30x dx - 9\int x^2 dx$

$$= 25x + 30\frac{x^2}{2} - 9\frac{x^2}{3} + c$$

$$= 25x + 15x^2 - 3x^3 + c$$

ఉత్పత్తి సున్న అయినపుడు సంస్థ భరిస్తున్న వ్యయాన్నే స్థిర వ్యయం అంటారు. స్థిర వ్యయం 55 అని ఇవ్వబడినది.

$$\therefore 55 = 25(0) + 15\left(0^2\right)^2 - 3(0)^3 + c \quad \therefore c = 55$$

సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయ ప్రమేయము $T = 25x + 15x^2 - 3x^3 + 55$

రాబడి ప్రమేయం : ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తము రాబడికి, అమ్మిన వస్తు పరిమాణానికి గల సంబంధాన్ని సంస్థ యొక్క మొత్తము రాబడి ప్రమేయము లేక రాబడి ప్రమేయము దీనిని సంకేతరూపములో R f(x) అని వ్రాస్తారు.

ఇక్కడ R మొత్తము రాబడిని, x అమ్మిన వస్తు పరిమాణాన్ని సూచిస్తున్నవి.

మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము వస్తుందని మీరిదివరకే తెలుసుకొన్నారు. అనగా ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R' = \frac{dR}{dx}$

కాబట్టి రాబడి ప్రమేయము $\therefore R = \int R'dx$

$\therefore$ ఉపాంత రాబడి ప్రమేయాన్ని సమాకలనము చేయగా మొత్తము రాబడి ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ :

(1) ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R' = 60 - 2x - 2x^2$ అయినపుడు దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

$R' = 60 - 2x - 2x^2$

$\therefore$ మొత్తము రాబడి ప్రమేయము, $R = \int R'dx = \int\left(60 - 2x - 2x^2\right) dx$

$= \int 60dx - \int 2xdx - \int 2x^2dx = 60\int dx - 2\int xdx - 2\int x^2dx$

$= 60x - 2\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + c \qquad = 60x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c$

అమ్మిన వస్తు పరిమాణము సున్నా అయినపుడు రాబడి సున్నా అవుతుంది. కాబట్టి

$0 = 60(0) - 0^2 - \frac{2}{3}\left(0^3\right) + c \quad \therefore c = 0$

రాబడి ప్రమేయము $R = 60x - x^2 - \frac{2}{3}x^3$

(2) ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి $MR = 16 - x^2$ అయితే x, వస్తు ఉత్పత్తి అయితే (1) ఆ సంస్థ యొక్క మొత్తం రాబడిని (2) డిమాండ్ ప్రమేయమును కనుగొనుము.

$$MR = 16 - x^2$$

$$\therefore \text{మొత్తం రాబడి ప్రమేయము } R = \int MR\ dx$$

$$= \int (16 - x^2) dx$$

$$= \int 16dx - \int x^2 dx + c$$

$$TR = 16x - \frac{x^3}{3} + c$$

(3) ఉపాంత రాబడి ప్రమేయం $MR = \frac{6}{(x+2)^2} + 5$ అయిన మొత్తం రాబడి ప్రమేయమును మరియు డిమాండ్ సమీకరణంను కనుగొనుము.

1. $$TR = x\left[\frac{a}{b(x+b)} - c\right]$$

$$= x\left[\frac{6}{(x+2)^2} + 5\right]$$

పై ప్రమేయంలో $a = 6, b = 2$ మరియు $c = 5$ అయితే

$$= x\left[\frac{6}{2(x+2)} + 5\right]$$

$$= x\left[\frac{3}{(x+2)} + 5\right]$$

$$= \frac{3x}{x+2} + 5x$$

2. డిమాండ్ ప్రమేయం సగటు రాబడికి సమానం కనుక

$$AR = \frac{TR}{x}$$

$$= \frac{3x}{x+2} + 5$$

$$x = f(p) = \frac{R}{P} = \frac{r}{b(p+c)} - b$$

$$= \frac{3}{p-5} - 2$$

వినియోగ ప్రమేయము : సమిష్టి వినియోగ వ్యయానికి సమిష్టి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయానికి గల సంబంధాన్ని వినియోగ ప్రమేయమంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో

$c = f(y)$ అని వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ c సమిష్టి వినియోగ వ్యయాన్ని, y సమిష్టి వ్యయార్హ వాస్తవిక ఆదాయాన్ని సూచిస్తుంది. వినియోగ ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి వస్తుందని మీకిదివరకే తెలుసు.

$\therefore$ ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి, $c' = \frac{dc}{dT}$

కాబట్టి వినియోగ ప్రమేయము, $c = \int c' dy$

$\therefore$ ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తిని సమాకలనము చేయగా వినియోగ ప్రమేయము వస్తుంది.

ఉదాహరణ :

(1) ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి $c' = 0.6 + 0.1\, y^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore$ వినియోగ ప్రమేయము

$$c = \int c' dy = \int\left(0.6 + 0.1 y^{-\frac{1}{3}}\right) dy$$

$$= \int 0.6 dy + \int 0.1 y^{-\frac{1}{3}} dy = 0.6y + 0.1 \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}+1} + c$$

$$0.6y + 0.15y^{\frac{2}{3}} + c$$

వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయము సున్నా అయినపుడు వినియోగ వ్యయము **40** కాబట్టి

$$40 = 0.6(0) + 0.15\left(0^{\frac{2}{3}}\right) + c \quad \therefore c = 40$$

$\therefore$ వినియోగ ప్రమేయము $c = 0.6y + 0.15y^{\frac{2}{3}} + 40$

(2) ఉదాహరణ : **2** ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి (MPC) $= 0.7 + 0.4y^{-\frac{1}{2}}$ అయితే వినియోగ ప్రమేయమును కనుగొనుము మరియు $y = 0$ వద్ద $c = 0$ వినియోగ వ్యయంను కనుగొనుము.

వినియోగ ప్రమేయం $(CF) = C(Y) = \int (MPC)\, dx$

$$C(Y) = \int \left(0.7 + 0.4\, Y^{-\frac{1}{2}}\right) dy$$

$$= \int 0.7\, dy + 0.4 \int y^{-\frac{1}{2}} dy + C$$

$$= 0.7y + 0.4\frac{y^{-1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 0.7Y + 0.8\ Y^{1/2} + c$$

అయితే $Y = 0, C = 10$

$\therefore 10 = 0.7(0) + 0.8(0) + A$

$A = 10$

కావలసిన వినియోగ ప్రమేయము

$$C(Y) = 10 + 0.8\sqrt{y} + 0.7y$$

పొదుపు ప్రమేయం : సమిష్టి పొదుపుకు, సమిష్టి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయానికి గల సంబంధాన్ని కీన్స్ పొదుపు ప్రమేయమంటారు. దీనిని సంకేత రూపంలో

s=f(y) అని వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ s సమిష్టి పొదుపును, y సమిష్టి వాస్తవిక వ్యయార్హ ఆదాయాన్ని సూచిస్తున్నవి. పొదుపు ప్రమేయాన్ని అవకలనము చేయగా, ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి వస్తుందని మీకిదివరకే తెలుసు.

$\therefore$ ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s' = \frac{dS}{dY}$ కాబట్టి పొదుపు ప్రమేయం $s = \int s'dy$

ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తిని సమాకలనము చేయగా పొదుపు ప్రమేయం వస్తుంది.

ఉదాహరణ : ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s' = 0.5 - 0.2y^{-\frac{1}{2}}$ మరియు ఆదాయము పొదుపు **-3.5** అయితే, పొదుపు ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

ఉపాంత పొదుపు ప్రవృత్తి $s' = 0.5 - 0.2y^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ పొదుపు ప్రమేయము,

$$s = \int s'dy = \int\left(0.5 - 0.2y^{-\frac{1}{2}}\right)dy = 0.5y - 0.2\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 0.5y - 0.4y^{\frac{1}{2}} + c$$

ఆదాయము **25** అయినపుడు పొదుపు **-3.5** కాబట్టి

$$-3.5 = 0.5(25) - 0.4(2.5)^{\frac{1}{2}} + c = 0.5(25) - 0.4\sqrt{25} + c \therefore c = -14$$

పొదుపు ప్రమేయము $s = 0.5y - 0.4\sqrt{y} - 14$

మూలధనము, పెట్టుబడి : మూలధనము k కాలము t తో మారుతుంటుంది. కాబట్టి మూలధన ప్రమేయాన్ని $k = f(t)$ అని వ్రాయవచ్చు. కాలముతో మూలధనములో వచ్చే మార్పురేటును పెట్టుబడి రేటు అంటారు.

$\therefore$ పెట్టుబడి $I = \dfrac{dk}{dt}$

$\therefore$ మూలధనము $k = \int I\, dt$

అనగా పెట్టుబడి రేటును $I = 80t^{\frac{2}{3}}$ మరియు $t = 0$ అయినపుడు మూలధనము 75 అయితే మూలధన ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

పెట్టుబడి రేటు $I = 80t^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ మూలధన ప్రమేయము $k\int I\, dt = \int 80t^{\frac{2}{5}} dt$

$$= 80\int t^{\frac{2}{5}} dt = 80\frac{t^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = 80.\frac{5}{7}t^{\frac{7}{5}} + c$$

$= \dfrac{400}{7}t^{\frac{7}{5}} + c \; t = 0$ అయినపుడు మూలధనము 75 కాబట్టి

$75 = \dfrac{400}{7} \cdot t^{\frac{7}{5}} + c \quad \therefore$ మూలధనము $k = \dfrac{400}{7} \cdot t^{\frac{7}{5}} + 75$

అభ్యాసము :

1. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T' = 15 + x^2$ మరియు స్థిర వ్యయము 50 అయితే దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

2. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయము $T' = 5 + 6e^x$ మరియు స్థిర వ్యయము 75 అయితే దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

3. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R' = 20 + 10x - 5x^2$ మరియు ఉత్పత్తి 5 యూనిట్లు అయినపుడు రాబడి 100 అయితే దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

4. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R' = 0.5x^{-0.5}$ అయితే దాని మొత్తము రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

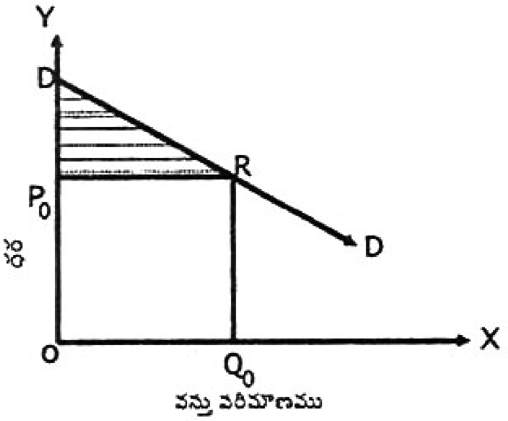
5. ఉపాంత వినియోగ ప్రవృత్తి $c' = 0.5 + 0.2y^{-\frac{1}{3}}$ మరియు ఆదాయము 500 అయినపుడు వినియోగము కూడా 500 అయితే, వినియోగ ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

10.2 నిశ్చిత సమాకలనం - ఆర్థిక అనువర్తన :

వినియోగదారుని మిగులు : ప్రతి వినియోగదారునికి, ఒక వస్తువుకు చెలిలంచుటకు అతను ఇష్టపడే ధర ఒకటి ఉంటుంది. కాని అతను వాస్తవంగా చెల్లించే ధర అవి కాకపోవచ్చు. అతడు వాస్తవంగా చెల్లించిన ధర ఇష్టపడిన ధర కంటే తక్కువ ఉంటే, ఆ వినియోగదారునికి మిగులు ఏర్పడుతుంది. ఈ మిగులునే వినియోగదారుని మిగులు అంటారు. ఇది వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడిన ధరలో నుండి అతను వాస్తవంగా చెల్లించిన ధరను తీసివేయగా వస్తుంది.

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు = వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడిన ధర - వాస్తవంగా చెల్లించిన ధర

వినియోగదారుని మిగులును ఈ క్రింద గీయబడిన రేఖాపటము విపులీకరిస్తుంది.



వినియోగదారుని డిమాండ్ రేఖ D, మరియు అతను Q_0 వస్తువును P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తాడనుకుందాము. అపుడు Q_0 వస్తువును P_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తాడనుకొందాము. అపుడు Q_0 వస్తువుకు అతను చెల్లించిన మొత్తము $P_0 Q_0$ అవుతుంది. Q_0 వస్తువుకు చెల్లించుటకు అతను ఇష్టపడిన మొత్తాన్ని డిమాండ్ రేఖ తెలియజేస్తుంది. ఇది O మరియు Q_0 బిందువుల మధ్య డిమాండ్ రేఖ క్రింద నుండే వైశాల్యం అవుతుంది. డిమాండ్ ప్రమేయము P=f(q) అయితే Q_0 వస్తువులకు వినియోగదారుడు చెల్లించుటకు ఇష్టపడే మొత్తము $\int_0^{Q_0} f(q)dq$ అవుతుంది.

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు = $\int_0^{Q_2} f(q)dq - p_0 q_0$ ఇది పై పటంలో చూపబడిన Shaded Area అవుతుంది $(p_0 RD)$.

ఉదాహరణ :

(1) ఒక వినియోగదారుని డిమాండ్ ప్రమేయం P = 25 - 2q. అతను 10 యూనిట్లను రూ.5 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు ఎంత? డిమాండ్ ప్రమేయము P = f(q) అయినపుడు వినియోగదారుని q_0 వస్తువులను p_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు ఎంత?

డిమాండ్ ప్రమేయము P = f(q) అయినపుడు వినియోగదారుడు q_0 వస్తువులను p_0 ధర వద్ద కొనుగోలు చేస్తే వినియోగదారుని మిగులు $\int_0^{Q_0} f(q)dq - p_0q_0$ అవుతుందని మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ $p_0 = 5, q_0 = 10$ డిమాండ్ ప్రమేయము $P = 25 - 2q$.

వినియోగదారుని మిగులు $\int_0^{10} (25-2q)dq - 5(10)$

$$= \int_0^{10} 25dq - \int_0^{10} 2q\ dq - 50 = 25[q]_0^{10} - 2\left(\frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 50$$

$$= 250 - 100 - 50 = 100$$

(2) ఒక వినియోగదారుని డిమాండ్ప్రమేయం $P = 39 - 3x^2$ అయిన వినియోగదారుని మిగులు కనుగొనుము మరియు $x = \frac{5}{2}$ వద్ద వినియోగదారుని మిగులు కనుగొనుము.

$CS = \int_0^{xm} f(x)dx - (X_m p_m)$ ముందుగా X_m, P_m విలువలు కనుగొనాలి.

ఇక్కడ $x_m = \frac{5}{2}$

$$P_m = 39 - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= 39 - 3\left(\frac{25}{4}\right)$$

$$= 39 - \frac{75}{4}$$

$$= \frac{156-75}{4} = \frac{81}{4}$$

$$CS = \int_0^{5/2} (39 - 3x^2)dx - \left(\frac{5}{2} \times \frac{81}{4}\right)$$

$$= |39x - x^3|_0^{5/2} - \frac{405}{8}$$

$$= \left|39\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^3\right| - |39(0) - (0)^3| - \frac{405}{8}$$

$$=\frac{195}{2}-\frac{125}{8}=\frac{405}{8}$$

$$=\frac{195}{2}-\frac{125}{8}-\frac{405}{8}$$

$$=\frac{780-125-405}{8}$$

$$=\frac{125}{4}=31.25$$

(3) వినియోగదారుని డిమాండ్ ప్రమేయం $P=10-x-x^2$ సప్లయ్ ప్రమేయం $p=x+2$ అయిన వినియోగదారుని మిగులు మరియు ఉత్పత్తిదారుని మిగులు కనుగొనుము.

డిమాండ్ = సప్లయ్

$10-x-x^2=x+2$

$x^2-x+x+10-2=0$

$x^2-2x+8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$x=-4,\ x=2$

$x=-4$ అనేది ఎటువంటి ఆర్థిక విలువ లేదు కాబట్టి దీనిని $x=2$ తీసుకోనుము.

$x=2$ వద్ద

$P=x+2=2+2=4$

సమతౌల్య విలువలు $P_m=4,\ x_m=2$

$$CS=\int^{x_m} f(x)dx-P_mX_m$$

$$=\int_0^2(10-x-x^2)dx-4.2$$

$$=10\int_0^2 1\cdot dx-\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx-8$$

$$=\left|10x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^2-8$$

$$=\left|10(2)-\frac{(2)^2}{2}-\frac{(2)^3}{3}\right|-|0|-8$$

$$=\left|20-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right|-8$$

$$=20-2-\frac{8}{4}-8$$

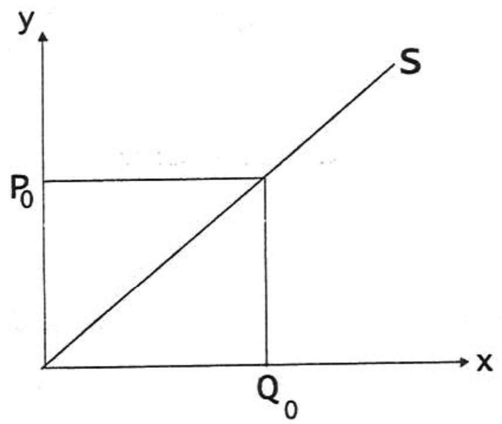
$$= \frac{60-6-8-24}{3}$$

$$= \frac{22}{3}$$

వినియోగదారుని యక్క మిగులు $= \frac{22}{3}$

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు (Producer's Surplus**) :** ఉత్పత్తిదారుడు వస్తువులను ఏ ఏ ధరల దగ్గర ఎంతెంత సప్లయి చేయడానికి ఇష్టపడతాడో, అతని సప్లయి రేఖ తెలియజేస్తుంది. కాని ఇలా వస్తువులను, సప్లయ్ చేయడానికి ఇష్టపడిన ధరల, వస్తువులను వాస్తవంగా ఏ ధరల సప్లయి చేస్తారో వాటికి సమానంగా నుండవు. సాధారణంగా వస్తువులను వాస్తవంగా సప్లయ్ చేస్తున్న ధరలు, వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఇష్టపడే ధరల కంటే ఎక్కువగా వుంటాయి. అపుడు ఉత్పత్తిదారునికి మిగులు ఏర్పడుతుంది. ఆ మిగులునే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు అంటారు. ఇది, ఉత్పత్తిదారుడు వస్తువులను సప్లయ్ చేస్తున్న ధరలో నుండి అతను వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఇష్టపడిన ధర తీసివేయగా వస్తుంది.

ఉత్పత్తిదారుని మిగులును ఈ క్రింద చూపబడిన రేఖా పటము విపులీకరిస్తుంది.



ఉత్పత్తిదారుని సప్లయ్ రేఖ s, మరియు అతను q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద సప్లయ్ చేస్తున్నాడనుకుందాము. అపుడు P_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయుట ద్వారా అతనికి వచ్చిన మొత్తం P_0Q_0 కాని Q_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయడానికి అతను ఇష్టపడే మొత్తాన్ని సప్లయ్ రేఖ తెలియజేస్తుంది. ఇది O మరియు Q_0 బిందువుల మధ్య సప్లయ్ రేఖ క్రింద నుండే వైశాల్యం అవుతుంది.

సప్లయ్ ప్రమేశము $P = f(q)$ అయితే Q_0 వస్తువులను సప్లయ్ చేయుటకు ఉత్పత్తిదారుడు ఇష్టపడే ధర $\int_0^{Q_0} f(Q)dq$ అవుతుంది.

$\therefore$ ఉత్పత్తిదారుని మిగులు = $P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ$ ఇది పై పటంలో చూపబడిన Shaded Area అవుతుంది.

ఉదాహరణ :

(1) ఒక ఉత్పత్తిదారుని సప్లయ్ ప్రమేయము $P=\sqrt{x+9}$. అతను **7** యూనిట్లు వస్తువులను, **4** రూపాయల ధర దగ్గర సప్లయ్ చేస్తే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు ఎంత**?**

సప్లయ్ ప్రమేయము P = f(q) అయినపుడు ఉత్పత్తిదారుడు q_0 వస్తువులను P_0 ధర వద్ద సప్లయ్ చేస్తే ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $p_0 q_0 = \int_0^q f(q)dq$ అవుతుంది. ఇక్కడ సప్లయ్ ప్రమేయము $p=\sqrt{q+9}, p_0=4, q_0=7$.

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $\therefore 4\times 7-\int_0^7 \sqrt{q+9}\ dq$

$$=28-\left[\frac{(q+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^7 = 28-\frac{2}{3}\left[(7+9)^{\frac{3}{2}}-(0+9)^{\frac{3}{2}}\right]=28-\frac{2}{3}\left[\sqrt{16}^3-\sqrt{9}^3\right]$$

$$=28-\frac{2}{3}[64-27]=28-\frac{2}{3}[37]=\frac{10}{3}$$

(2) ఒక వస్తువు యొక్క సప్లయ్ ప్రమేయం $P=\sqrt{9+x}$ అతను **7** యూనిట్లు వస్తువులను అమ్మిన ఉతపత్తిదారుని మిగులు ఎంత సప్లయ్ ప్రమేయం $P=\sqrt{9+x}$

$$x=7$$
$$P=\sqrt{9+7}$$
$$P=\sqrt{16}$$
$$P=4$$
$$P_m=4,\ X_m=7$$
$$P.S=P_mX_m-\int g(x)dx$$
$$=4\times 7-\int_0^7 (9+x)^{1/2}\,dx$$
$$=28-\frac{2}{3}\left[(9+7)^{1/2}-(9+0)^{1/2}\right]$$
$$=28-\frac{2}{3}\left((16)^{1/2}-(9)^{1/2}\right)$$
$$=28-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{9}\right)$$
$$=28-\frac{2}{3}\left((4)^3-(3)^3\right)$$

$$= 28 - \frac{2}{3}(64 - 27)$$

$$= 28 - \frac{2}{3}(37)$$

$$= 28 - \frac{74}{3}$$

$$= \frac{84 - 74}{3} = \frac{10}{3}$$

(3) డిమాండ్ ప్రమేయము P = 4+3q అయినపుడు వినియోగదారుని మిగులు, ఉత్పత్తిదారుని మిగులు కనుగొనుము.

వినియోగదారుని మిగులు, ఉత్పత్తిదారుని మిగులు కనుగొనడానికి, వినియోగదారుడు వస్తువులను ఏ ధర వద్ద ఎంత కొనుగోలు చేసిందీ, అలాగే ఉత్పత్తిదారుడు ఏ ధర వద్ద ఎంత సప్లయ్ చేసిందీ తెలియాలి. మార్కెట్ సమతౌల్యంలో ఉందనుకుంటే, ~~ఈ~~ విలువలు సమతౌల్యవిలువల అవుతాయి.

మార్కెట్ సమతౌల్యం దగ్గర, సప్లయ్ డిమాండ్‌లు సమానంగా ఉంటాయి.

$$\therefore \frac{P-4}{3} = \frac{20-P}{5}$$

$$\therefore 5(P-4) - 3(20-P)$$

$$\therefore 5P - 20 = 60 - 3P$$

$$\therefore 5P + 3P = 60 + 20 = 80$$

$$\therefore 8P = 80$$

$$\therefore P = \frac{80}{8} = 10$$

P విలువను సప్లయ్ ప్రమేయము (లేక డిమాండ్ ప్రమేయము)లో ప్రతిక్షేపించగా q=2 వస్తుంది. $\therefore P_0 = 10, q_0 = 2$

$\therefore$ వినియోగదారుని మిగులు $\int_0^2 (20 - 5q)\,dq - 20$

$$= \int_0^2 20dq - \int_0^2 5q\ dq - 20$$

$$= [20q]_0^2 - 5\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^2 - 20 = 20(2-0) - 5\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 20$$

$$= 40 - 10 - 20 = 10$$

ఉత్పత్తిదారుని మిగులు $= 20-\int_0^2 4dq-\int_0^2 3q\ dq$

$$= 20-4[9]^2-3\left[\frac{9^2}{3}\right]_0^2$$

$$= 20-4(2-0)-3\left(\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)= 20-8-6=6$$

10.3 అవగాహన ప్రశ్నలు / మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు :

I. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత వ్యయ ప్రమేయం $T^1 = 5+8x$ మరియు స్థిర వ్యయం 75 అయినపుడు దాని మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము కనుగొనుము.

II. ఒక సంస్థ యొక్క ఉపాంత రాబడి ప్రమేయము $R^1 = 10+20x-3x^2$ అయినపుడు దాని రాబడి ప్రమేయాన్ని కనుగొనుము.

III. ఈ క్రిందనీయబడిన సమాకలనిలను కనుగొనుము.

IV. ఒక సంపూర్ణ పోటీ మార్కెట్‌లో డిమాండ్ ప్రమేయము, $p = 25-q^2$ సప్లయ్ ప్రమేయము $p = 2q+1$ అయినపుడు, వినియోగదారుని మిగులును, ఉత్పత్తిదారుని మిగులును కనుగొనుము.

10.6 సంప్రదింపు గ్రంథాలు :

1. R.G.D. Allen : Mathematical Analysis for Economics (MAC Million India Limited, 1986 Chapter - XV)
2. Alpha C. Chaing : Fundamental Methods of Mathematical Economics Third Edition, Mc GrawHill International Editions Chapter - Xiii
3. Edward T. Dowling : Mathematics for Economists Schaum's Outline Series in Economics. Mc Graw Hill Book Company, Chapter, 16 & 17.
4. G.S. Monga : Mathematics and Statistics for Economics Vikas Publishing House Pvt. Ltd., Chapter - ii

భాగం– 5

పాఠం -1`

మాత్రికా సిద్ధాంతం: రకాలు, గణితం, నిర్ధారకాలు

13.0 పాఠం ఆశించిన ఫలితాలు

13.1 పరిచయం

13.2 మాత్రికా భావన సంజ్ఞామానం

13.3 మాత్రికల రకాలు

13.4 మాత్రికల పొందిక

13.5 మాత్రికల బీజగణితం

13.5.1 మాత్రికల సమానత్వం

13.5.2 మాత్రికల సంకలనం, వ్యవకలనం

13.5.3 మాత్రిక గుణకారం

13.5.4 మాత్రిక గుణకారం

13.6 మాత్రిక నిర్ధారకం

13.7 రెండవ, మూడవ క్రమం నిర్ధారకం

13.8 నిర్ధారకం లక్షణాలు

13.9 సారాంశం

13.10 పదకోశం

13.11 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

13.12 సూచించబడిన పఠనం

13.0 అభ్యాస ఫలితాలు:

ఈ పాఠం నేర్చుకున్న తర్వాత, మీరు వీటిని సునాయాసంగా చేయగలరు:

i) మాత్రిక భావన, దాని ఉపయోగాలు మరియు దాని సంజ్ఞామానాలను నిర్వచించడం;

ii) వివిధ రకాల మాత్రికలను వివరించడం;

iii) మాత్రికల సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం చేయడం;

iv) 2x2, 3x3 మాత్రికల నిర్ధారకం మూల్యాంకనం చేయడం;

v) ఉదాహారణలతో మాత్రికల లక్షణాలను విశ్లేషించడం.

13.1 పరిచయం

మాత్రికా గణితంని ఏకఘాత బీజ గణితం అని కూడా అంటారు. ఏకకాల సమీకరణ వ్యవస్థ ఎంత పెద్దది అయినప్పటికీ, వాటిని చక్కగా రాసే మార్గాన్ని ఇది అందిస్తుంది. సమీకరణ వ్యవస్థ నిర్ధారకాన్ని మూల్యాంకనం చేయడం ద్వారా, దాని పరిస్కారం ఉనికిని పరీక్షించడానికి మనకు మాత్రికా గణితం వీలు కల్పిస్తుంది. దాని పరిష్కారాన్ని కనుగొనే పద్ధతిని ఇది మనకు అందిస్తుంది. ఇది నిచ్చలన, తులనాత్మక నిచ్చలన, చలన విశ్లేషణలలో ఉపయోగపడుతుంది. పరిశ్రమ ఉత్పాదకాలు, ఉత్పత్తుల మధ్య నుండు పరస్పర సాంకేతిక సంబంధాన్ని పరిశీలించే ఉత్పాదక, ఉత్పత్తి విశ్లేషణలో (Input-Output Analysis) మాత్రికా బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది. మాత్రికా బీజగణితం జాతీయ ఆదాయ విశ్లేషణ, సామాజిక అకౌంటింగ్‌లో కూడా ఉపయోగపడుతుంది. అయితే, మాత్రిక బీజగణితం కేవలం సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థను విశ్లేషించడంలో మాత్రమే ఉపయోగపడుతుంది. సరళ సంబంధాల పరంగా వాస్తవ ప్రపంచ పరిస్థితిని ఎంతవరకు వివరించవచ్చో గమనించడం ముఖ్యం.

11.2 మాత్రికా భావన సంజ్ఞామానం

మాత్రిక అనేది, 'm' అడ్డు వరుసలు, 'n' నిలువు వరుసల సంఖ్యలలో ఏర్పరచిన చలరాసులు లేదా పారామితుల దీర్ఘచతురస్రాకార అమరిక. వాటిని కుండలీకరణాలతో(Brackets) కప్పిన యెడల, అటువంటి అమరికను మాత్రిక అంటాం. మాత్రికలకు పెద్ద అక్షరాలు, మాత్రికలోని మూలకాలను లేదా సభ్యులను ఆంగ్ల చిన్న అక్షరాలతో గుర్తిస్తాం. 'A'-మాత్రిక, i వ అడ్డు వరుస, jవ నిలువు వరుసలో ఉండు ఒక మూలకంను 'a_{ij}' ద్వారా సూచించబడుతుంది. ఉప అక్షరాలా క్రమం చాలా

ముఖ్యమైనది. ఎందుకంటే, 'i' ఎల్లప్పుడూ మూలకం ఉన్న అడ్డు వరుసను సూచిస్తుంది. 'j' ఎల్లప్పుడూ మూలకం ఉన్న నిలువు వరుసను సూచిస్తుంది. కింది మాత్రికను పరిశీలించండి.

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \in M_{m\times n}$$

పై మాత్రికకు A మాత్రిక అని గుర్తించాం. మాత్రిక సంజ్ఞామానంలో ఇది $[a_{ij}]$గా కూడా సూచించబడుతుంది. ఈ మాత్రికలో m అడ్డు వరుసలు, n నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి. కాబట్టి, మాత్రిక క్రమం 'm x n'. మాత్రిక మొదటి మూలకం a_{11}. దీనిలో మొదటి సంఖ్య 1 మూలకం ఉన్న అడ్డు వరుసను సూచిస్తుంది. రెండవ 1 మూలకం ఉన్న నిలువు వరుసను సూచిస్తుంది. , ఈ మూలకం 'a_{11}' ద్వారా సూచించబడుతుంది. మరొక మూలకం a_{21}ని తీసుకోండి. ఈ మూలకంలో, మొదటి సంఖ్య 2, మూలకం ఉన్న అడ్డు వరుసను సూచిస్తుంది. రెండవ సంఖ్య, మూలకం ఉన్న నిలువు వరుసను సూచిస్తుంది. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, మూలకం, a_{21} A మాత్రికలోని రెండవ అడ్డు వరుస, మొదటి నిలువు వరుసలో ఉంటుంది.

13.3 మాత్రికల రకాలు

మాత్రికల్లలో అనేక రకాలున్నాయి. ప్రధానమైన కొన్ని రకాలను మనం ఇక్కడ వివరిస్తాం.

11.3.1 అడ్డువరస మాత్రిక : ఒకే ఒక అడ్డువరసలో మూలకాలను కలిగిన ఒక మాత్రికను, అనగా 1 x m రూపం గల మాత్రికను అడ్డువరస మాత్రిక లేదా అడ్డువరస సదిశ (Row Vector) అంటారు.

ఉదా: A = $[\, a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \,]$

A = $[2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$

11.3.2 నిలువు వరస మాత్రిక : ఒకే ఒక నిలువు వరుసలో మూలకాలను కలిగిన ఒక మాత్రికను, అనగా 'm x 1' రూపం గల మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక లేదా నిలువు వరుస సదిశ (Column Vector) అంటారు.

ఉదా: $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

11.3.3 చతురస్ర మాత్రిక : ఒక మాత్రికలోని అడ్డువరసల **సంఖ్య నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా ఉంటే, ఆ మాత్రికను**

'చతురస్ర మాత్రిక' **అంటారు.**

ఉదా: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.4 వికర్ణ మాత్రిక: వికర్ణ మాత్రిక అనేది ప్రధాన వికర్ణంలో (Principal Diagonal) మినహా, మిగిలిన ప్రతి స్థానంలో సున్నాలు ఉండే చతురస్ర మాత్రిక. ప్రధాన వికర్ణం అంటే ఎగువ ఎడమ స్థానం నుంచి కుడికి క్రింది స్థానం వరకు వ్యాపించు మూలకాలు.

ఉదా: $A = \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}_{3 \times 3}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.5 త్రిభుజాకార మాత్రిక: ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని, a_{ij} మూలకాలు, i<j గా ఉన్నప్పుడు, సున్నాకి సమానం అయినప్పుడు, దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అని, i>j, గా ఉన్నప్పుడు, ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అని పిలుస్తారు.

దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక **ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక**

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

ఉదా. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11. 3. 6 శూన్య (లేదా) సున్నా మాత్రిక: ప్రతి మూలకం సున్నాగా ఉండే మాత్రిక ను శూన్య మాత్రిక లేదా సున్నా మాత్రిక అంటారు.

ఉదా. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.7 ఆదిశ మాత్రిక: వికర్ణ మూలకాలు సమానంగా ఉండే వికర్ణ మాత్రికను **ఆదిశ** మాత్రిక (Scalar Matrix) అంటారు.

ఉదా. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.8 తత్సమ **మాత్రిక:** వికర్ణ మూలకాలు ఏకత్వానికి (ఒకటికి) సమానంగా ఉండే వికర్ణ మాత్రికను తత్సమ లేదా సమానత్వ మాత్రిక అంటారు.

ఉదా. **A** $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.9 వ్యత్యయం మాత్రిక: ఒక మాత్రికలోని అడ్డు వరుస మూలకాలను నిలువు వరుస మూలకాలుగా, నిలువు వరుస మూలకాలను అడ్డు వరుస మూలకాలుగా వ్రాయడం ద్వారా ఏర్పడు మాత్రికను వ్యత్యయం మాత్రిక (Transpose of a matrix) అంటారు. దీన్ని A^T గా గుర్తిస్తారు.

ఉదా. **A** $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ $\quad$ $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.3.10 సౌష్ఠవ మాత్రిక: ఒక మాత్రిక నిర్మాణం, వ్యత్యయం ద్వారా మార్పు చెందనట్లైతే అనగా $A = A^T$ అయితే, A అనేది సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటారు.

ఉదా. **A** $= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ $\quad$ $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

11.4 **మాత్రికలపై యుగళ పరిక్రయాలు (Binary Operations on Matrices)**: మాత్రికలపై సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారాలు, మాత్రికల విలోమాన్ని కనుగొనడం అనేవి మాత్రికలపై చేసే ప్రధాన కార్యకలాపాలు. మాత్రికల సంకలనం, వ్యవకలనం కోసం, మాత్రికల సమానత్వం అవసరమైన షరతు. మాత్రికల గుణకారం కోసం, మాత్రికల అనుగుణత (Conformability) తప్పనిసరి పరిస్థితి. మాత్రిక విలోమాన్ని (ఇది భాగాహారంకు సమానం) కనుగొనడానికి, మాత్రిక నిర్ధారకం సున్నాకి సమానంగా ఉండకూడదు.

11.4.1 మాత్రికల సమానత్వం: A , B మాత్రికలు ఒకే క్రమంలో ఉండి, వాటిలోని, సంబంధిత మూలకాలు ఒకేలా ఉంటే, A, B రెండు మాత్రికలు సమాన మాత్రికలు అంటారు.

ఉదా . A $= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 64 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ ఉదా B $= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 64 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

11.4.2 మాత్రికల గుణకారం అనుగుణత: మొదటి మాత్రికలోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, రెండవ మాత్రికలోని అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానంగా ఉంటే, A, B అనే రెండు మాత్రికలు గుణకారానికి అనుగుణతమైనవిగా (Conformable for multiplication of matrices) చెప్పబడతాయి. కాబట్టి, A మాత్రిక క్రమము m x n, B మాత్రిక క్రమము r x s అయినట్లయితే, n = r నిబంధన పూరింపబడితే, A, B మాత్రికలు గుణకారానికి అనుకూలమైనవి.

A $= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 64 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ B $= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 16 & 25 \\ 23 & 12 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

A, B అనుగుణమైన మాత్రికలు. A, B మాత్రికలను గుణిస్తే, మనకు 2 x 3

3 x 2 = 2 x 2 చదరపు మాత్రిక వస్తుంది.

11.4.3 మాత్రికల సంకలనం /వ్యవకలనం: A, B రెండూ m × n మాత్రికలు అయితే, $[a_{ij} + b_{ij}]$ లేదా A + Bని సూచించే మొత్తం, A , B మాత్రికల సంబంధిత మూలకాలను సంకలనం ద్వారా పొందిన మాత్రిక. రెండు మాత్రికలు సమన క్రమం (The same order) కలిగిఉండడం వాటి సంకలనంకు అవసరమైన నిబంధన

A $= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ B $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

$$A + B \text{ లేదా } [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+2 & 9+9 \\ 8+1 & 5+3 & 4+6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 18 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

అదేవిదంగా A, B మాత్రికల వ్యవకలనం

$$A - B \text{ లేదా } [a_{ij} - b_{ij}] = \begin{pmatrix} 3-4 & 4-2 & 9-9 \\ 8-1 & 5-3 & 4-6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

మాత్రికా సంకలన ధర్మాలు:

1. మాత్రికా సంకలనం వినిమయ న్యాయాన్ని (Commutative Law) కలిగి ఉంటుంది. అనగా A, B మాత్రికలు ఒకే రూపం గల మాత్రికలు అయితే, A+B = B+A అవుతుంది.
2. మాత్రికా సంకలనం సాహచర్య న్యాయాన్ని (Associative Law) కూడా కలిగి ఉంటుంది. అనగా A, B, C మాత్రికలు ఒకే రూపం గల మాత్రికలు అయితే, (A+B)+C =(A+(B+C) అవుతుంది.

11.4.4 మాత్రికల ఆదిశ గుణకారం:

A అనేది $m \times n$ మాత్రిక, k అనేది ఆదిశ అయితే, A యొక్క ప్రతి మూలకాన్ని kతో గుణించడం ద్వారా పొందిన మాత్రికను kA సూచిస్తాము. ఈ విధానాన్ని ఆదిశ **గుణకారం** అంటారు.

ఉదారహరణ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad 3A = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(-2) & 3(2) \\ 3(0) & 3(-1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

ఈ ఉదారహరణలో A మాత్రికను 3 అను ఆదిశ తో గుణించడం జరిగింది.

మాత్రికల ఆదిశ గుణకారం ధర్మాలు

$$1. k(hA) = (kh)A$$
$$2. (k+h)A = kA + hA$$
$$3. k(A+B) = kA + kB$$

11.4.5 మాత్రికల గుణకార అనుగుణత:

రెండు మాత్రికలు గుణకార అనుగుణత కలిగిఉన్నప్పుడు మాత్రమే మాత్రికల గుణకారం సాధ్యమవుతుంది. అంటే మొదటి మాత్రిక నిలువు వరుసల సంఖ్య, రెండవ మాత్రిక అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానంగా ఉండాలి. బాణాలలో చూపిన విధంగా సంబంధిత మూలకాలను జోడించడం ద్వారా మొదటి మాత్రిక యొక్క అడ్డు వరుసలను రెండవ మాత్రిక యొక్క నిలువు వరుసలతో గుణించండి.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(3)(2)+(-2)(-1)+(1)(-3)=5 \qquad A=\begin{bmatrix}5 & -\\ - & -\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(3)(4)+(-2)(3)+(1)(1)=7 \qquad A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ - & -\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(0)(2)+(4)(-1)+(-1)(-3)=-1 \qquad A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -1 & -\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(0)(4)+(4)(3)+(-1)(1)=11 \qquad A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -1 & 11\end{bmatrix}$$

కాబట్టి, అవసరమైన లబ్ధ మాత్రిక పై విధంగా ఉంటుంది. అందువలన, రెండు మాత్రికలను గుణించటానికి A, B, మాత్రికల క్రమం ఇలా ఉండాలి.

$m\times n$ మాత్రికల క్రమం $n\times p$ లబ్ధ మాత్రిక క్రమం

11.4.6 మాత్రికల గుణకార లక్షణాలు:

1. మాత్రికా గుణకారానికి వినిమయ న్యాయం (Commutative Law) వర్తించదు. అనగా, AB, BA లు సమానం కానక్కరలేదు.

కాని Aకు B విలోమం అయితే, AB = BA అవుతుంది.

2. మాత్రిక గుణకారం సాహచర్యం న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది. అనగా, A, B, Cసీ మాత్రికలు గుణకారానికి అనువుగా ఉంటే,

[(AB)C = A(BC)]

3. A, I, మాత్రికలు గుణకారానికి అనువుగా ఉంటే, AI = IA అవుతుంది.

4. A, 0, మాత్రికలు గుణకారానికి అనువుగా ఉంటే, A0 = 0A = 0 అవుతుంది.

5. AB = o అయితే, A, B లలో ఏదో ఒకటి సూన్య మాత్రికా కానక్కర్లేదు.

6. AB = AC అయినా, BA = CA అయినా, B=C, కానక్కర్లేదు.

7. A, B, Cసీ మాత్రికలు గుణకారానికి అనువుగా ఉంటే, A(B+C) = AB+AC అవుతుంది. దీన్ని విభాగ న్యాయం (Distributive Law) అంటాం

11.5 నిర్ధారకాలు, వాటి ధర్మాలు

నిర్ధారకం అనేది మాత్రికకు సంబంధించిన స్వచ్ఛమైన సంఖ్య. ఇది ఇది ధనాత్మకం, లేదా రుణాత్మకం లేదా సూన్యం కావచ్చు. చతురస్ర మాత్రికకు మాత్రమే నిర్ధారకాలు ఉంటాయి. మాత్రిక నిర్ణాయకం సున్నా అయితే, దానిని ఏక మాత్రిక అని పిలుస్తారు, లేకపోతే దానిని ఏకవచనం కాని మాత్రిక అంటారు. ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థకు ప్రత్యేకమైన పరిష్కారం ఉనికిని పరీక్షించడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.

13.5.1 2 x 2 మాత్రిక నిర్ధారకం: 2 x 2 క్రమం కైలిగిన మాత్రిక నిర్ధారకం (Det. A.) ఈ విదంగా కనుగొనవచ్చు.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Det. A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

$$A = \begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} = (4x3) - (2x1) = 12 - 2 = 10$$

11.5.2: 3 x 3 మాత్రిక నిర్ధారకం: 3 x 3 క్రమం కైలిగిన మాత్రిక నిర్ధారకం, ఏదైనా ఒక అడ్డు వరుస లేదా ఏదైనా ఒక నిలువు వరుస తీసుకోవడం ద్వారా కనుగొనవచ్చు

$$\text{Det. A} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}xa_{33}-a_{23}xa_{32})-a_{12}(a_{21}xa_{33}-a_{23}-a_{31})+a_{13}(a_{21}xa_{32}-a_{22}xa_{31})$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\1 & 0 & -1\\2 & 5 & 1\end{pmatrix} = +3\begin{pmatrix}0 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\1 & 0 & -1\\2 & 5 & 1\end{pmatrix} = -(-4)\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\1 & 0 & -1\\2 & 5 & 1\end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 5\end{pmatrix}$$

= 3{0+5} –(-4) {1-(-2)}+1{5-0}

= 3{5}+4{1+2)+1{5}

= 3{5}+4{3)+1{5}

= 15+12+5

= 32

కాబట్టి ఇవ్వబడిన మాత్రిక నిర్ధారకం 32.

గమనిక: మొదటి మాత్రికలో, మొదటి అడ్డు వరస మొదటి నిలువ వరుసలను తొలగించిన తరువాత, మిగిలిన మాత్రికను లఘు నిర్ధారకం (Minor) అంటాం. ఈ లఘు నిర్ధారకం మాత్రికలో మొదటి మూలకం a_{11}కు సంబంధించింది. మాత్రికలో ఈ మూలకం స్థానం బట్టి గుర్తును ఇచ్చినట్లైతే, దాన్ని సహ గుణావయం (Co-Factor) అంటాం. గుర్తు ఇచ్చు నియమం $(-1)^{(i+j)}$ లాగా ఉంటుంది. ఇందులో, i అడ్డు వరుసను, j నిలువు వరుసను చూచిస్తాయి. ఉదాహరణకు a_{11} గుర్తు, $(-1)^{1+1}=(-1)^2=(-1)(-1)=+1$ అవుతుంది. అలాగే a_{12} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{1+2}=(-1)^3=(-1)(-1)(-1)=-1$ అవుతుంది. a_{21} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{2+1}=(-1)^3=(-1)(-1)(-1)=-1$ అవుతుంది. a_{22} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{2+2}=(-1)^4=(-1)(-1)(-1)(-1)=+1$ అవుతుంది. ఇలా మాత్రికలోని ప్రతి మూలకానికి ఒకే లఘు నిర్ధారకం, గుర్తు ఉంటుంది. ఈ నియమం ఆధారంగా పైన మూలకాలకు గుర్తులు ఇవ్వబడినాయి. ఇలా గుర్తులతో పొందబడిన మాత్రికను గుణావయం మాత్రిక అంటాం.

13.5.3 నిర్ధారకం లక్షణాలు:

1. నిర్ధారకంలో ఏదైనా రెండు అడ్డు వరుసలు లేదా నిలువు వరుసలు పరస్పరం మార్చబడినట్లయితే, ఆ నిర్ధారకం, దాని సంపూర్ణ విలువను కలిగి ఉంటుంది, కానీ దాని సంకేతం (గుర్తు) మార్పు చెందుతుంది.

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

2. నిర్ధారకంలో నుండి అన్ని అడ్డు వరుసలను నిలువు వరుసలుగా, నిలువు వరుసలను అడ్డు వరుసలుగా, మార్చినట్లయితే, నిర్ధారకం విలువ మారదు.

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

3. నిర్ధారకంలో రెండు అడ్డు వరుసలు లేదా నిలువు వరుసలు ఒకేలా ఉంటే, నిర్ధారకం అదృశ్యమవుతుంది. అంటే నిర్ధారకం విలువ సున్నా అవుతుంది.

$$Det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

4. నిర్ధారకంలో, ఏదైనా ఒక అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుసను K అనే స్థిరాంకంతో గుణించబడిన తరువాత నిర్ధారకం పొందితే, అలా పొందిన నిర్ధారకం అసలు నిర్ధారకం విలువ కంటే k రెట్లు ఉంటుంది.

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = kD$$

5. ఏదైనా అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుసకు, మరొక అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుస యొక్క సంబంధిత మూలకాలకు k రెట్లు మూలకాలను జోడించబడితే, నిర్ధారకం విలువ మారదు.

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad Det\begin{pmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

6. ఏదైనా అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుస అన్ని మూలకాలు సున్నాలు అయితే, అప్పుడు నిర్ధారకం సున్నా అవుతుంది.

$$Det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad Det\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Det. = 0

7. x = a అని పెట్టడం ద్వారా నిర్ధారకం అదృశ్యమైతే, x-a అనేది నిర్ధారకం యొక్క కారకం.

$$Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a2 & b2 & c2 \end{pmatrix}$$

ఈ నిర్ధారకం (a-b)ని కారకంగా కలిగి ఉంటుంది, ఎందుకంటే a=bని పెట్టడం ద్వారా, మొదటి, రెండవ నిలువు వరుసలు ఒకేలా మారతాయి. అందువల్ల నిర్ధారకం అదృశ్యమవుతుంది.

8. ఏదైనా అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుస ఏదైనా ఇతర అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుస యొక్క బహుళంగా వ్యక్తీకరించబడినట్లయితే, నిర్ధారకం సున్నా అవుతుంది. దీన్నే అడ్డు వరుసలు లేదా నిలువు వరుసల సరళ ఆధారిత అంటారు.

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & a2 & a_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

11.6 సారాంశం:

ఈ పాఠంలో, మనం మాత్రిక భావన, దాని సంజ్ఞామానాన్ని నిర్వచించాము. సంఖ్యలు, చలరాశులు, పారామితుల దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికను మాత్రిక అంటారు. మాత్రికలు ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలతో సూచించబడతాయి, వాటి మూలకాలు ఆంగ్ల చిన్న అక్షరాలతో సూచించబడతాయి. అడ్డు వరుస మాత్రిక, నిలువు వరుస మాత్రిక, వికర్ణ మాత్రిక, త్రిభుజాకార మాత్రిక, ఆదిశ మాత్రిక, శూన్య (లేదా) సున్నా తత్సమ లేదా సమానత్వ మాత్రిక , వ్యత్యయం మాత్రిక, సౌష్టవ మాత్రిక, విలక్షణ, అవిలక్షణ

మాత్రిక వంటి అనేక రకాల మాత్రికలు ఉన్నాయి. మాత్రికలను సంకలనం, వ్యవకలనం చేయవచ్చు, గుణించవచ్చు. మాత్రిక విలోమ భావన, మాత్రిక నిర్ధారకం భావనతో దగ్గరి సంబంధం కలిగి ఉంటుంది. నిర్ధారకం అనేది ధనాత్మకం, రుణాత్మకం లేదా సున్నా అయిన స్వచ్ఛమైన సంఖ్య. చతురస్రాకార మాత్రికలకు మాత్రమే నిర్ధారకాలు కనుగొనబడతాయి. ఈ పాఠంలో మనం రెండు, రెండు, మూడు, మూడు క్రమం కలిగిన మాత్రికలకు నిర్ధారకంని ఎలా గణించాలో నేర్చుకున్నాము. నిర్ధారకంలో ఎనిమిది ముఖ్యమైన లక్షణాలు ఉన్నాయి. ఈ లక్షణాలు మాత్రికల నిర్ధారకం, విలోమాన్ని మరింత సులభమైన మార్గంలో మూల్యాంకనం చేయడానికి మనకు సహాయపడతాయి.

11.7 పదకోశం

1. మాత్రిక	: Matrix
2. చలరాశులు	: Variables
3. పారామితుల	: Parameters
4. అడ్డు వరుస మాత్రిక	: Row Matrix
5. నిలువు వరుస మాత్రిక	: Column Matrix
6. వికర్ణ మాత్రిక	: Diagonal Matrix
7. త్రిభుజాకార మాత్రిక	: Triangular Matrix
8. ఆదిశ మాత్రిక	: Scalar Matrix
9. శూన్య (లేదా) సున్నా	: Null Matrix or Zero Matrix
10. తత్సమ మాత్రిక	: Identical Matrix
11. , వ్యత్యయం	: Transpose
12. సౌష్ఠవ మాత్రిక	: Symmetric Matrix
13. విలక్షణ	: Singular Matrix
14. అవిలక్షణ మాత్రిక	: Non-Singular Matrix
15. మాత్రికల సంకలనం	: Addition of Matrices
16. మాత్రికల వ్యవకలనం	: Subtraction of Matrices
17. మాత్రిక విలోమ	: Inverse of Matrix
18. మాత్రిక నిర్ధారకం	: Determinant of a matrix
19. చతురస్రాకార మాత్రిక	: Square Matrix
20. నిర్ధారకం లక్షణాలు	: Properties of Determinant

11. 8 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

11.8.1 కింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి

1. మాత్రికను నిర్వచనం చేసి, ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

2. ఎగువ, దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రికల మధ్య భేదాలను ఉదాహరణలతో తెలుపుము.

3. అర్థశాస్త్రంలో మాత్రికా ఉపయోగాలు తెలపండి.

4. కింది మాత్రికకు నిర్ధారకం కనుకొనుము.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

11.8.2 కింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి

1. మాత్రికను నిర్వచనం చేసి, వివిధరకాల మాత్రికలు వివరించండి

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ అయితే, 2A+2B కనుగొనండి.

3. కింది మాత్రికలను గుణించి, AB = o అని నిరూపించుము.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. నిర్ధారకం లక్షణాలను ఉదాహరణలతో వివరింపుము.

11.9 సూచించబడిన పుస్తకాలు

1. Alpha Chiang : Fundamental Methods of Mathematical Economics

2. R. G. D. Allen: Mathematical Analysis for Economists

3. Mehta and Medhani: Mathematics for Economists.

*****

భాగం– 5

పాఠం -12

మాత్రికా విలోమం, సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థ, పరిష్కారం

పాఠం యొక్క రూపురేఖలు

12.0 పాఠం ఆశించిన ఫలితాలు:

ఈ పాఠం నేర్చుకున్న తర్వాత, మీరు వీటిని సునాయాసంగా చేయగలరు:

i) మాత్రిక లఘు నిర్ధారకం, సహగుణావయవ మాత్రిక, **అనుబంధ** మాత్రిక భావనలను, వాటి సంజ్ఞామానాలను నిర్వచించడం;

ii) 2 x 2 , 3 x 3 మాత్రికలకు విలోమం గణించడం;

iii) **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**ను మాత్రిక రూపంలో రాయడం;

iv) రెండు, మూడు చలరాశుల **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**కు మాత్రికా విలోమం ద్వారా పరిష్కారం కనుగొనడం;

v) రెండు, మూడు చలరాశుల **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**కు **క్రామెర్స్** నియమం ప్రకారం పరిష్కారం సాధించడం.

12.1 పరిచయం

గడచిన పాఠంలో, మనం మాత్రిక భావన, దాని సంజ్ఞామానాన్ని నిర్వచించాము. అడ్డు వరుస మాత్రిక, నిలువు వరుస మాత్రిక, వికర్ణ మాత్రిక, త్రిభుజాకార మాత్రిక, ఆదిశ మాత్రిక, శూన్య (లేదా) సున్నా, తత్సమ లేదా సమానత్వ మాత్రిక , వ్యత్యయం మాత్రిక, సౌష్ఠవ మాత్రిక, విలక్షణ, అవిలక్షణ మాత్రిక వంటి వివిధ రకాల మాత్రికలను గూర్చి చర్చించాము. మాత్రికల సంకలనం, వ్యవకలనం గుణకారం గూర్చి నేర్చుకున్నాము. మాత్రిక విలోమ భావనతో దగ్గరి సంబంధం కలిగిన నిర్ధారకం, 2 x 2, 3 x 3 క్రమం కలిగిన మాత్రికలకు నిర్ధారకంని ఎలా గణించాలో నేర్చుకున్నాం. నిర్ధారకం సంబంధించిన ఎనిమిది ముఖ్యమైన లక్షణాలను తెలుసుకున్నాం. ఈ లక్షణాలు మాత్రికల నిర్ధారకం, విలోమాన్ని మరింత సులభమైన మార్గంలో మూల్యాంకనం చేయడానికి మనకు సహాయపడతాయిని వివరించాం. ఈ పాఠంలో మాత్రిక లఘు నిర్ధారకం, సహగుణావయం మాత్రిక, **అనుబంధ** మాత్రిక భావనలను, వాటి సంజ్ఞామానాలను గూర్చి వివరంగా తెలుసుకుంటాం. అలాగే 2 x 2, 3 x 3 మాత్రికలకు విలోమం గణించడం, **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**ను మాత్రిక రూపంలో రాయడం, రెండు, మూడు చలరాశుల **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**కు మాత్రికా విలోమం ద్వారా పరిష్కారం కనుకోవడం, రెండు, మూడు చలరాశుల **ఏకకాల సమీకరణాల వ్యవస్థ**కు **క్రామెర్స్** నియమం ప్రకారం పరిష్కారం సాధించడం మొదలగు అంశాలను గూర్చి వివరంగా నేర్చుకుంటాం.

12.2 మాత్రిక లఘు నిర్ధారకం:

ఒక మాత్రికలో, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అడ్డు వరుసలు, నిలువు వరుసలు తీసివేయడం ద్వారా పొందబడు చిన్న చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం, 'లఘు నిర్ధారకం' అంటాం. మాత్రిక A, i-వ అడ్డు వరుస, j-వ నిలువు వరుసను తీసివేయడం ద్వారా పొందిన లఘు నిర్ధారకం' M_{ij} ద్వారా సూచించబడుతుంది. దీనిని A_{ij} మాత్రికలోని, a_{ij} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' అని కూడా పిలుస్తారు. నిర్ధారకం నియమం ప్రకారం, ఏ మూలకానికీ లఘు నిర్ధారకం కావాలో, ఆ మూలకం ఉన్న అడ్డు వరుసను, ఆమూలకం ఉన్న నిలువు వరుసను తొలగించి, మిగిలిన మూలకాలను లఘు నిర్ధారకంలో రాయవలసి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ:

a_{11} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{11} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{12} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{13} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{13} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

A_{21} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{21}= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

A_{22} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{22} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

A_{23} మూలకంకు సంబంధించిన 'లఘు నిర్ధారకం' M_{23} = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

A_{31} మూలకంకు సంబంధించిన ‘లఘు నిర్ధారకం’ M_{31} = $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

a_{32} మూలకంకు సంబంధించిన ‘లఘు నిర్ధారకం’ M_{32} = $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

A_{33} మూలకంకు సంబంధించిన ‘లఘు నిర్ధారకం’ M_{33} = $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

12.2 **సహ్ గుణావయవ** మాత్రిక **(Co-Factor Matrix):**

లఘు నిర్ధారకం (Minor)లో, ఈ మూలకం ఉన్న స్థానం బట్టి గుర్తును ఇచ్చినట్లైతే, దాన్ని సహ్ గుణావయం (Co-Factor) అంటాం. గుర్తు ఇచ్చు నియమం $(-1)^{(i+j)}$ లాగా ఉంటుంది. ఇందులో, i అడ్డు వరుసను, j నిలువు వరుసను చూచిస్తాయి. ఉదాహరణకు a_{11} గుర్తు, $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = (-1)(-1) = +1$ అవుతుంది. అలాగే a_{12} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$ అవుతుంది. a_{21} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{2+1} = (-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$ అవుతుంది. a_{22} మూలకం గుర్తు, $(-1)^{2+2} = (-1)^4 = (-1)(-1)(-1)(-1) = +1$ అవుతుంది.

a_{11} మూలకంకు సంబంధించిన ‘సహ్ గుణావయం’ $C_{11} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(1+1)} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + (a_{22} \times a_{33})-(a_{23} \times a_{32})$

a_{12} మూలకంకు సంబంధించిన ‘సహ్ గుణావయం’ $C_{12} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(1+2} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{21} \times a_{33})-(a_{23} \times a_{31})$

a_{13} మూలకంకు సంబంధించిన ‘సహ్ గుణావయం’ $C_{13} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(1+3)} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = + (a_{21} \times a_{32})-(a_{22} \times a_{31})$

a_{21} మూలకంకు సంబంధించిన ‘సహ్ గుణావయం’ $C_{21} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(2+1)} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{12} \times a_{33})-(a_{13} \times a_{32})$

a_{22} మూలకంకు సంబంధించిన ‘సహ్ గుణావయం’ $C_{22} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(2+2)} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = + (a_{11} \times a_{33})-(a_{13} \times a_{31})$

a_{23} మూలకంకు సంబంధించిన 'సహ్ గుణావయం' $C_{23} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(2+3)} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11} \times a_{32}) - (a_{12} \times a_{31})$

a_{31} మూలకంకు సంబంధించిన 'సహ్ గుణావయం' $C_{31} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(3+1)} = + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = +(a_{12} \times a_{23}) - (a_{13} \times a_{22})$

a_{32} మూలకంకు సంబంధించిన 'సహ్ గుణావయం' $C_{32} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(3+2)} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11} \times a_{23}) - (a_{13} \times a_{21})$

సహగుణావయవ మాత్రిక

a_{33} మూలకంకు సంబంధించిన 'సహ్ గుణావయం' $C_{33} = (-1)^{(r+c)} = (-1)^{(3+3)} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$

ఇదే విధంగా అన్ని మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుగొనవచ్చు. ఒక మాత్రికలోని అన్నీ మూలకాల సహగుణావయవాలను కనుగొని వాటిని ఒక మాత్రిక రూపంలో అమర్చినట్లైతే, అటువంటి మాత్రికను సహగుణావయవ మాత్రిక (Co-Factor Matrix) అంటాం.

12.3 **అనుబంధ** మాత్రిక (Adjoint Matrix):

సహగుణావయవ మాత్రికకు (Co-Factor Matrix) వ్యత్యాయాన్ని (Transpose) పొందినట్లైతే మనకు అనుబంధ మాత్రిక (Adjoint Matrix) లబిస్తుంది. అనగా, సహగుణావయవ మాత్రికలోని అడ్డు వరుస మూలకాలను నిలువు వరుస మూలకాలుగా, నిలువు వరుస మూలకాలను అడ్డు వరుస మూలకాలుగా రాయాలి.

ఉదాహరణకు, సహగుణావయవ మాత్రిక

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ అయితే, అనుబంధ మాత్రిక A_{ij}

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ అవుతుంది.

12.4 విలోమ మాత్రిక (Inverse Matrix)

అనుబంధ మాత్రికలోని ప్రతి మూలకాన్ని నిర్ధారకం విలువతో భాగించగా, ఇవ్వబడిన మాత్రికకు "విలోమ మాత్రిక" మనకు లభిస్తుంది. "విలోమ మాత్రిక" ని, A^{-1} గా గుర్తిస్తాం. ఉదాహరణకు,

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{Det.A} Adj.A = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{D} & \frac{a_2}{D} & \frac{a_3}{D} \\ \frac{b_1}{D} & \frac{b_2}{D} & \frac{b_3}{D} \\ \frac{c_1}{D} & \frac{c_2}{D} & \frac{c_3}{D} \end{vmatrix}$$

12.5 సంఖ్యా ఉదాహరణలు

కొన్ని సంఖ్యా ఉదాహరణాలద్వారా మనం 2 x 2, 3 x 3 క్రమం కలిగిన మాత్రికలకు విలోమ మాత్రికలు ఎలా గణించాలో తెలుసుకుంటాం. విలోమం పొందటానికి ముఖ్యమైన నిభంధన, నిర్ధారకం విలువ సూన్యంగా ఉండకూడదు. నిర్ధారకం సున్న కలిగిన మాత్రికను "విలక్షణ మాత్రిక" (Singular Matrix) అంటాం. నిర్ధారకం సున్న కాని మాత్రికను "అవిలక్షణ మాత్రిక" (Non-Singular Matrix) అంటాం.

12.5.1: 2 x 2 క్రమం కలిగిన మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక

ఉదాహరణ- 1:

2 x 2 క్రమం కలిగిన కింది మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక కనుకోనుము

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$$

పరిష్కారం:

మాత్రిక నిర్ధారకం: Det. A $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = (2 \times -5) - (3 \times 11) = -10-33 = -43 \neq 0$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది "అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix). ఈ మాత్రికకు మనం విలోమం కనుగోనవచ్చు.

సహగుణావయవ మాత్రిక

ముందుగా, ఈ మాత్రిక మూలకాలకు సహగుణావయవాలను, సహగుణావయవ మాత్రికను కనుకోందాం. మాత్రికలోని మొదటి అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలు, తరువాత రెండవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుకోందాం.

మూలకం 2కు సహగుణావయవం $= (-1)^{1+1} |-5| = (1)(-5) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -5$

మూలకం 3కు సహగుణావయవం $= (-1)^{1+2} |11| = (-1)(11) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -11$

మూలకం 11కు సహగుణావయవం $= (-1)^{2+1} |3| = (-1)(3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -3$

మూలకం -5కు సహగుణావయవం= $(-1)^{2+2}\,|3| = (1)(2) = \begin{vmatrix} 2 & \cancel{3} \\ \cancel{11} & \cancel{-5} \end{vmatrix} = 2$

కాబట్టి సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \dfrac{1}{Det.A} Adj.A = \dfrac{1}{-43} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \begin{pmatrix} \dfrac{-5}{-43} & \dfrac{-3}{-43} \\ \dfrac{-11}{-43} & \dfrac{2}{-43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{43} & \dfrac{3}{43} \\ \dfrac{11}{43} & \dfrac{2}{-43} \end{pmatrix}$

ఇవ్వబడిన మాత్రికను, దాని విలోమ మాత్రికను గుణించిన యెడల మనకు తత్సమ మాతికా లభించాలి. అనగా, $A.A^{-1}$ లేదా $A^{-1}A = I$

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{5}{43} & \dfrac{3}{43} \\ \dfrac{11}{43} & \dfrac{2}{-43} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(5/43)+3(11/43) & 2(3/43)+3(2/-43) \\ 11(5/43)+(-5)(11/43) & 11(3/43)+(-5)(2/-43) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10+33)/43 & (6-6)/43 \\ (55-55)/43 & (33+10)/43 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{43}{43} & \dfrac{0}{43} \\ \dfrac{0}{43} & \dfrac{43}{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.5.2: 3 x 3 క్రమం కలిగిన మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక

ఉదాహరణ- 2:

క్రింద ఇవ్వబడిన, 3 x 3 క్రమం కలిగిన కింది మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక కనుకొనుము.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

పరిష్కారం:

మాత్రిక నిర్ధారకం: Det. A = $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$= -1^{(1+1)}\, 4[(3x7)-(2x0)\ -1^{(1+2)}1[(0X7)-(2X3)]\ -1^{(1+3)}\ -1\ [(0X0)-(3X3)]$

$=1\ X4[21-0]\ 1X\ -1[0-6]1\ X-1[0-9]$

$= 4[21]-1[-6]-1[-9]$

$= 84+6+9 = 99 \neq 0$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది "అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix). ఈ మాత్రికకు మనం విలోమం కనుగొనవచ్చు.

సహగుణావయవ మాత్రిక

ముందుగా, ఈ మాత్రిక మూలకాలకు సహగుణావయవాలను, సహగుణావయవ మాత్రికను కనుకొందాం. మాత్రికలోని మొదటి అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు, తరువాత రెండవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు, తరువాత మూడవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుకొందాం. మూలకాలు **ఉన్న స్థానం బట్టి, $-1^{(r+c)}$ నియమం ప్రకారం** మూలకాలకు **గుర్తులను ఇస్తాం.**

మొదటి అడ్డు వరుస:

మూలకం 4కు సహగుణావయవం= $(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = +1(21-0) = 21$

మూలకం 1కి సహగుణావయవం= $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1(0-6) = 6$

మూలకం -1కి సహగుణావయవం= $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(0-9) = -9

రెండవ అడ్డు వరుస

మూలకం 0కి సహగుణావయవం= $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = -1(7-(-0)) = -7

మూలకం 3కి సహగుణావయవం= $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(28-(-3)) = 31

మూలకం 2కి సహగుణావయవం= $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = -1(0-3) = 3

మూడవ అడ్డు వరుస

మూలకం 3కి సహగుణావయవం= $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(2-(-3)) = 5

మూలకం 0కి సహగుణావయవం= $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ = -1(8-(-0)) = -8

మూలకం 7కి సహగుణావయవం= $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ =1(12-(-0)) =12

కాబట్టి సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \dfrac{1}{Det.A} Adj.A = \dfrac{1}{99} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \begin{pmatrix} \frac{21}{99} & \frac{-7}{99} & \frac{5}{99} \\ \frac{6}{99} & \frac{31}{99} & \frac{-8}{99} \\ \frac{-9}{99} & \frac{3}{99} & \frac{12}{99} \end{pmatrix}$

ఇవ్వబడిన మాత్రికను, దాని విలోమ మాత్రికను గుణించిన యెడల మనకు తత్సమ మాతికా లభించాలి. అనగా,
$A.A^{-1}$ లేదా $A^{-1}A = I$

$$I = AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{21}{99} & \frac{-7}{99} & \frac{5}{99} \\ \frac{6}{99} & \frac{31}{99} & \frac{-8}{99} \\ \frac{-9}{99} & \frac{3}{99} & \frac{12}{99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

మొతటి ఉదాహరణలో గణించిన విదంగా చేసి, పై పలితాన్ని మీరు నిరూపించవచ్చు.

12.6 సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు వ్యవస్థ (System of Simultaneous Equations)

ఈ పాఠం ప్రారంభంలో తెలిపినట్లు, సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థని, మాత్రిక రూపంలో అనువైన రీతిలో రాసి, దాని సాధించటానికి, అనగా దాని అజ్ఞాత విలువలను (unknown values) తెలుసుకోవడానికి మాత్రికా జామితి అనువుగా ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, ఇవ్వబడిన సమీకరణాల వ్యవస్థని,

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{33}x_3 = b_2$

$\mathbf{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3}$

మాత్రిక రూపంలో కింది విదంగా రాయగలం.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

గుణకాల మాత్రికను A గాను, చలరాశుల మాత్రికను X గాను, స్థిరరాశుల మాత్రికను B గాను రాసిన యెడల మనకు

A X = B లభిస్తుంది.

మాత్రికా విలోమం, మాత్రికా గుణకారం పద్ధతులను వినియోగించి మనం అజ్ఞాత విలువలైన X_1, X_2, X_3 విలువలను పొందగలం. మాత్రికా పరిమాణం ఎంత భారీఎత్తున ఉన్నప్పటికీ, సంఖ్య ఎంత ఉన్నా, వాటిని మనం తేలికగా సాధించగలిగే సౌలభ్యాన్ని మాత్రికా సిద్ధాంతం ఇస్తుంది. కాని సాధనకి అత్యవసర నిబంధన ఏమిటంటే, **ఎన్ని** అజ్ఞాత **విలువలున్నాయో** (number of unknowns) అన్ని స్వతంత్ర సమీకరణాలు (number of independent equaltions) ఉండాలి.

మాత్రిక సిద్ధాంతం వినియోగించి సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు వ్యవస్థని సాధించటానికి రెండు విభిన్న పద్ధతులు ఉన్నాయి. అవి

1. మాత్రిక విలోమ పద్ధతి,
2. క్రమరు నియమం.

వీటిని వుపయోగించి మనం సమీకరణాల వ్యవస్థని సాధించి వాటి అజ్ఞాత విలువలను తెలుసుకుందాం.

12.6.1 మాత్రిక విలోమ పద్ధతి

A అనే మాత్రిక అవిలక్షణ మాత్రిక అయితే, అనగా దాని నిర్ధారకం సున్నా కానట్లైతే, ఆ మాత్రికకు విలోమం (A^{-1}) ఉంటుంది. A X = B అనే సమీకరణాని రెండు వైపులా A^{-1}తో ముందు గుణించగా,

$A^{-1} A X = A^{-1} B$

ఇవ్వబడిన మాత్రికను, దాని విలోమ మాత్రికను ముందు కాని లేదా వెనక కానీ గుణించినట్లైతే, మనకు తత్సమ మాత్రిక (Identity Matrix- I) లభిస్తుందని మనం ఇదివరకే నిరూపించాం. కాబట్టి,

$I X = A^{-1} B$

అలాగే ఏ మాత్రికనైనా తత్సమ మాత్రిక Iతో గుణించినట్లైతే, ఆ మాత్రిక విలువ మారదని కూడా మనకు తెలుసు. కాబట్టి

$X = A^{-1} B.$

అనగా, X మాత్రిక అజ్ఞాన విలువలు పొందాలి అంటే ఆ మాత్రికకు విలోమం కనుగొని, దాన్ని, స్థిరవిలువల మాత్రిక అయిన B మాత్రిక తో గుణించాలి.

ఉదాహరణ- 3: కింది ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థని, మాత్రిక విలోమ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$5x_1 + 3x_2 = 30$

$6x_1 - 2x_2 = 8$

పరిష్కారం:

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల సరణిని మాత్రికా రూపంలో రాయగా,

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{= AX = B}$$

$A^{-1} A X = A^{-1} B$

$I X = A^{-1} B$

$X = A^{-1} B$

ఇవ్వబడిన గుణకాల మాత్రికకు నిర్ధారకం పొందగా,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \quad \mathbf{= [(5x\text{-}2) - (3x6)] = -10\text{-}18 = -28 \neq 0}$$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది "అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix). ఈ మాత్రికకు మనం విలోమం కనుగొనవచ్చు.

సహగుణావయవ మాత్రిక

ముందుగా, ఈ మాత్రిక మూలకాలకు సహగుణావయవాలను, సహగుణావయవ మాత్రికను కనుకొందాం. మాత్రికలోని మొదటి అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలు, తరువాత రెండవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుకొందాం.

మూలకం 5కు సహగుణావయవం $= (-1)^{1+1} \, |-2| = (1)(-2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -2$

మూలకం 3కు సహగుణావయవం $= (-1)^{1+2} \, |6| = (-1)(6) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6$

మూలకం 6కు సహగుణావయవం $= (-1)^{2+1} \, |3| = (-1)(3) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -3$

మూలకం -2కు సహగుణావయవం $= (-1)^{2+2} \, |5| = (1)(5) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 5$

కాబట్టి సహగుణావయవ మాత్రిక = $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక = $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} = $\frac{1}{Det.A} Adj.A = \frac{1}{-28} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 8 \end{bmatrix}$

X- మాత్రిక = A^{-1} x B = $\begin{pmatrix} \frac{-2}{-28} & \frac{-3}{-28} \\ \frac{-6}{-28} & \frac{5}{-28} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 8 \end{bmatrix}$

= $\begin{matrix} \frac{-2}{-28}.X30 + \frac{-3}{-28}X8 = \frac{60}{28} + \frac{24}{28} = \frac{84}{28} = 3 \\ \frac{-6}{-28}X30 + \frac{5}{-28}X8 = \frac{180}{28} - \frac{40}{28} = \frac{140}{28} = 5 \end{matrix}$

కాబట్టి x_1 విలువ = 3, x_2 విలువ =5.

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల సరణిలో విలువలను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వారా

$5x_1 + 3x_2 = 30$

$6x_1 - 2x_2 = 8$

5(3) +3 (5) = 30

6 (3) – 2(5) = 8

15 + 15 = 30

18 – 10 = 8

ఉదాహరణ - 4: కింది ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థని, మాత్రిక విలోమ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

పరిష్కారం:

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల వ్యవస్థని మాత్రికా రూపంలో రాయగా,

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{AX = B}$$

$A^{-1} A X = A^{-1} B$

$I X = A^{-1} B$

$X = A^{-1} B$

ఇవ్వబడిన గుణకాల మాత్రికకు నిర్ధారకం పొందగా,

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 7[(-2x-2)-(1x3)] -(-1)[(10x-2)-(1x6)]+(-1)[(10x3)-(-2x6)]$$

$= 7[4-3]+1[-20-6]-1[30+12]$

$= 7[1]+1[-26]-1[42]$

$= 7-26-42$

$= -68 + 7 = -61 \neq 0$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది "అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix). ఈ మాత్రికకు మనం విలోమం కనుగొనవచ్చు.

సహగుణావయవ మాత్రిక

ముందుగా, ఈ మాత్రిక మూలకాలకు సహగుణావయవాలను, సహగుణావయవ మాత్రికను కనుకొందాం. మాత్రికలోని మొదటి అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు, తరువాత రెండవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు, తరువాత మూడవ అడ్డు వరుసలో నుండు మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుకొందాం. మూలకాలు **ఉన్న స్థానం బట్టి, $-1^{(r+c)}$ నియమం ప్రకారం** మూలకాలకు **గుర్తులను ఇస్తాం.**

మొదటి అడ్డు వరుస:

మూలకం 7కు సహగుణావయవం= $(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = +1(4-3) = 1$

.

మూలకం -1కి సహగుణావయవం= $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1(-20-6) = 26$

మూలకం -1కి సహగుణావయవం= $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = +1(30+12) = 42

రెండవ అడ్డు వరుస

మూలకం -10కి సహగుణావయవం = $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -1(2+3) = -5

మూలకం -2కు సహగుణావయవం = $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = +1(-14+6) = -8

మూలకం 1కి సహగుణావయవం = $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -1(21+6) = -27

మూడవ అడ్డు వరుస

మూలకం 6కు సహగుణావయవం = $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = +1(-1-2) = -3

మూలకం 3కు సహగుణావయవం = $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -1(7+10) = -17

మూలకం 2కు సహగుణావయవం = $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = +1(-14+10) = -4

కాబట్టి సహగుణావయవ మాత్రిక = $\begin{pmatrix} 1 & 26 & 42 \\ -5 & -8 & -27 \\ -3 & -17 & -4 \end{pmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \frac{1}{Det.A} Adj.A = \frac{1}{-61} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{pmatrix}$

విలోమ మాత్రిక", A^{-1} $= \begin{pmatrix} \frac{1}{-61} & \frac{-5}{-61} & \frac{-3}{-61} \\ \frac{26}{-61} & \frac{-8}{-61} & \frac{-17}{-61} \\ \frac{42}{-61} & \frac{-27}{-61} & \frac{-4}{-61} \end{pmatrix}$

X- మాత్రిక $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{-61} & \frac{5}{61} & \frac{3}{61} \\ \frac{26}{-61} & \frac{8}{61} & \frac{17}{61} \\ \frac{42}{-61} & \frac{27}{61} & \frac{4}{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

X- మాత్రిక $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{-61} x0 + \frac{5}{61} x8 + \frac{3}{61} x7 \\ \frac{26}{-61} x0 + \frac{8}{61} x8 + \frac{17}{61} x7 \\ \frac{42}{-61} x0 + \frac{27}{61} x8 + \frac{4}{61} x7 \end{pmatrix}$

X- మాత్రిక $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 0 + \frac{40}{61} + \frac{21}{61} = \frac{61}{61} = 1 \\ 0 + \frac{64}{61} + \frac{119}{61} = \frac{183}{61} = 3 \\ 0 + \frac{216}{61} + \frac{28}{61} = \frac{244}{61} = 4 \end{pmatrix}$

X- మాత్రిక $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

12.6.2 క్రామరు నియమం

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల వ్యవస్థని,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{33}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3$$

మాత్రిక రూపంలో గుణకాల మాత్రికను A గాను, చలరాశుల మాత్రికను X గాను, స్థిరరాశుల మాత్రికను B గాను కింది విధంగా రాసిన యెడల

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

మనకు A X = B లభించునని మనం ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం. X- మాత్రిక విలువలను తెలుసుకోవటానికి క్రామరు అనే గణిత శాస్త్రవేత్త, ఒక తేలికైన పద్ధతిని రూపొందించారు. ఆ నియమం ప్రకారం, నిర్ధారకం సున్నా కానప్పుడు, అనగా, Det. A $\neq$ 0,

$$X_i = \frac{D_i}{Det.A}, \; i = 1, 2, 3, \ldots n$$

అనగా, $X_1 = \frac{D_1}{Det.A}$, $X_1 = \frac{D_2}{Det.A}$, $X_1 = \frac{D_3}{Det.A}$ అవుతాయి. ఇందులో D_1 అనేది, గుణకాల మాత్రికలో, మొదటి నిలువ వరుసలో ఉన్న విలువల స్థానంలో, సమీకరణానికి కుడి వైపు ఉన్న స్థిర రాసుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వార లభించు నిర్ధారకం. D_2 అనేది, గుణకాల మాత్రికలో, రెండవ నిలువ వరుసలో ఉన్న విలువల స్థానంలో, సమీకరణానికి కుడి వైపు ఉన్న స్థిర రాసుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వార లభించు నిర్ధారకం. D_3 అనేది, గుణకాల మాత్రికలో, మూడవ నిలువ వరుసలో ఉన్న విలువల స్థానంలో, సమీకరణానికి కుడి వైపు ఉన్న స్థిర రాసుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేయడం ద్వార లభించు నిర్ధారకం. ఈ విధంగా తదుపరి చలరాశుల విలువలను పొందగలుగుతాము.

$$X_1 = \frac{D_1}{Det.A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$X_2 = \frac{D_2}{Det.A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$X_3 = \frac{D_3}{Det.A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ఉదాహరణ - 5: కింది ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థని, క్రామరు నియమం పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$5x_1 + 3x_2 = 30$

$6x_1 - 2x_2 = 8$

పరిష్కారం:

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల సరణిని మాత్రికా రూపంలో రాయగా,

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \end{pmatrix} = AX = B$$

$$X_1 = \frac{D_1}{Det.A},\quad X_2 = \frac{D_2}{Det.A},$$

ఇవ్వబడిన గుణకాల మాత్రికకు నిర్ధారకం పొందగా,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = [(5x\text{-}2) - (3x6)] = -10-18 = -28 \neq 0$$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది “అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix).

$D_1 = \begin{vmatrix} 30 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$ **= [(30x-2) –(3x8)] = -60-24 = - 84**

$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ **= [(5x8) –(30x6)] = 40-180 = - 140**

కాబట్టి $= X_1 = \dfrac{|D_1|}{Det.A} = \dfrac{-84}{-28} = 3$

$X_2 = \dfrac{|D_2|}{Det.A} = \dfrac{-140}{-28} = 5$

ఉదాహరణ - 6: కింది ఏక ఘాత సమీకరణాల వ్యవస్థని, క్రామరు నియమం పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

పరిష్కారం:

ఇవ్వబడిన సమీకరణాల వ్యవస్థని మాత్రికా రూపంలో రాయగా,

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = AX = B$$

ఇవ్వబడిన గుణకాల మాత్రికకు నిర్ధారకం పొందగా,

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 7[(-2x-2)-(1x3)] -(-1)[(10x-2)-(1x6)]+(-1)[(10x3)-(-2x6)]$$

$= 7[4-3]+1[-20-6]-1[30+12]$

$= 7[1]+1[-26]-1[42]$

$= 7-26-42$

$= -68 + 7 = -61 \neq 0$

నిర్ధారకం విలువ సున్నా కాలేదు కాబట్టి, ఇది “అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix). .

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0[(-2x-2)-(1x3)] - (-1)[(8x-2)-(1x7)] + (-1)[(8x3)-(-2x7)]$$

= 0[4−3]+1[-16-7]-1[24+14]

= 0[1]+1[-23]-1[38]

= 0-23-38

= -61

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 7[(8x-2)-(1x7)] - 0[(10x-2)-(1x6)] + (-1)[(10x7)-(8x6)]$$

= 7[-16−7]+0[-20-6]-1[70-48]

= 7[-23]+0[-26]-1[22]

= -161+0-22

= -183

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7[(-2x7)-(8x3)] - 1[(10x7)-(8x6)] + 0)[(10x3)-(-2x6)]$$

= 7[-14−24]+1[70-48]-0[30 +12]

= 7[-38]+1[122]-0[42]

= -266+22+0

= -244

కాబట్టి $= X_1 = \dfrac{|D_1|}{Det.A} = \dfrac{-61}{-61} = 1$

$X_2 = \dfrac{|D_2|}{Det.A} = \dfrac{-183}{-61} = 3$

$X_3 = \dfrac{|D_3|}{Det.A} = \dfrac{-244}{-61} = 4$

12.7 సారాంశం

ఈ పాఠంలో ఒక మాత్రికకు విలోమం ఎలా కనుక్కోవాలని తెలుసుకున్నాం. మాత్రిక విలోమం కనుక్కోవటానికి మాత్రిక నిర్ధారకం సున్నగా ఉండకూడదు. ఇవ్వబడిన మాత్రికకు $(-1)^{r+c}$ నియమం ప్రకారం సహగుణావయవాలను, సహగుణావయవ మాత్రికను కనుగొన్నాము. సహగుణావయవ మాత్రికకు (Co-Factor Matrix) వ్యత్యాయాన్ని (Transpose) పొందిన తరువాత,

అనగా, సహగుణావయవ మాత్రికలోని అడ్డు వరుస మూలకాలను నిలువు వరుస మూలకాలుగా, నిలువు వరుస మూలకాలను అడ్డు వరుస మూలకాలుగా వ్రాసిన తర్వాత, మనకు అనుబంధ మాత్రిక (Adjoint Matrix) లభించింది. అనుబంధ మాత్రికను నిర్ధారకంతో భాగించిన తరువాత మనం మాత్రిక విలోమం పొందగలిగినాం. ఏకకాల సమీకరణ వ్యవస్థ ఎంత పెద్దది అయినప్పటికీ, వాటిని చక్కగా రాసే మార్గాన్ని మాత్రిక సిద్ధాంతం అందిస్తుంది. సమీకరణ వ్యవస్థ 'గుణకాల మాత్రిక' నిర్ధారకాన్ని మూల్యాంకనం చేయడం ద్వారా, దాని పరిస్కార ఉనికిని (Existence of Solution) పరీక్షించడానికి మనకు మాత్రిక గణితం వీలు కల్పిస్తుంది. అంతేకాక దాని పరిష్కారాన్ని కనుగొనే పద్ధతిని ఇది మనకు అందిస్తుంది. సమీకరణ వ్యవస్థ పరిష్కారాన్ని, మాత్రిక విలోమ పద్ధతి, క్రామరు నియమం అనే రెండు విభిన్న పద్ధతులు ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. మాత్రిక విలోమ పద్ధతిలో, గుణకాల మాత్రికకు విలోమం కనుక్కొని, దాన్ని కుడివైపు ఉన్న స్థిర రాశుల మాత్రికతో గుణించిన యెడల మనకు అజ్ఞాన విలువలు లభిస్తాయి. క్రామరు నియమం ప్రకారం, గుణకాల మాత్రికకు నిర్ధారకం కనుక్కొన్న తరువాత, గుణకాల మాత్రికలోని నిలువు వరుసల స్థానంలో, కుడివైపు ఉన్న స్థిర రాశుల మాత్రికను ప్రత్యామ్నాయం చేసి నిర్ధారకాలను కన్నుకోవాలి. అలాపొందిన వివిధ నిర్ధారకాలను గుణకాల మాత్రిక నిర్ధారకంతో భాగించిన యెడల మనకు అజ్ఞాన విలువలు లభిస్తాయి.

12.8 పదకోశం

1. విలక్షణ మాత్రిక : Singular Matrix
2. అవిలక్షణ మాత్రిక : Non-Singular Matrix
3. మాత్రిక నిర్ధారకం : Determinant of a matrix
4. లఘు నిర్ధారకం : Minor of a determinant
5. సహగుణావయవ మాత్రిక : Co-Factor Matrix
6. వ్యత్యాయం : Transpose
7. అనుబంధ మాత్రిక : Adjoint Matrix
8. మాత్రిక విలోమ : Inverse of Matrix
9. సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు సరణి: System of Simultaneous Equations
10. పరిస్కార ఉనికి : Existence of Solution
11. క్రామారు నియమం : Cramer's Rule
12. అజ్ఞాన విలువలు : Unknown Values
13. స్థిర రాశులు : Constants
14. గుణకాలు : Coefficients

12.9 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

12.9.1 కింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి:

1. కింది మాత్రికకు నిర్ధారకంను కనుగొనుము.

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. కింది మాత్రికల నిర్ధారకంను కనుగొనండి.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. కింది మాత్రికకు విలోమంను కనుగొనుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4. కింది మాత్రికకు సహగుణావయవ మాత్రికను కనుగొనుము

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

12.9.2 కింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి:

1. కింది మాత్రికకు విలోమంను కనుగొనుము

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (a) కింది సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు సరణిని మాత్రిక విలోమ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$$2x_1 + x_2 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 = 8$$

(b) కింది సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు సరణిని క్రామారు నియమం పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$$5x_1 - 2x_2 = 15$$

$$4x_1 + x_2 = 12$$

3. కింది సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు సరణిని మాత్రిక విలోమ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము:

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_3 = 5$$

4. కింది సమకాలీన ఏక ఘాత సమీకరణాలు సరణిని క్రామారు నియమం పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$3x_2 + 2x_3 = 16$$
$$5x_1 + 3x_3 = 21$$

12.10 సూచించబడిన పఠనం

1. Alpha Chiang (2017), ***Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4th Edition, New Delhi: McGraw Hills.***

2. R. G. D. Allen, (2014), ***Mathematical Analysis for Economists***, New Delhi: **Trinity Press.**

3. B.C. Mehta and G.M.K. Madnani, ***Mathematics for Economists***, New Delhi: Sultan Chand & Sons.

****

Total No. of Questions : 10]

M.A. DEGREE EXAMINATION, MODEL QUESTION PAPER

Semester = I

ECONOMICS

MATHEMETICAL METHODS

Time : 3 Hours **Maximum Marks : 70**

Answer any **FIVE** Questions
All Questions Carry Equal Marks

Q1) a) Explain different types of Functions with an example.
వివిధ రకాల ప్రమేయాలను ఉదాహణతో సహా వివరించండి.

b) Evaluate $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{2x^3+3x^2+5}{-5x^3+8x-17}$

$\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{2x^3+3x^2+5}{-5x^3+8x-17}$ ను విస్తరించండి.

(or)

c) Write the properties of linear homogeneous function.
సమఘాత ప్రమేయాల ధర్మాలను వ్రాయండి.

d) Find the continuity of following function at x = 3. $\underset{x\to 3}{\mathrm{Lt}} \frac{x^3-27}{x^2+3x-18}$

x = 3 వద్ద $\underset{x\to 3}{\mathrm{Lt}} \frac{x^3-27}{x^2+3x-18}$ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నతను కనుగొనుము.

Q2) a) Explain the rules of differentiation.
అవకలన నియమాలను తెలుపుము.

b) For a total cost of a firm $c(x)=0.005x^3-0.7x^2-30x+3000$, where x is output determine average cost and marginal cost.
ఒక సంస్థ యొక్క మొత్తం వ్యయము $c(x)=0.005x^3-0.7x^2-30x+3000$ అయితే ఆ సంస్థ యొక్క సగటు వ్యయం మరియు ఉపాంత వ్యయాన్ని కనుగొనండి.

(or)

c) If the demand function is $p=4-5x$, for what value of x will be elasticity of demand be unity.
$p=4-5x$, డిమాండ్ ప్రమేయమైతే అవి ఎక్కడ ఏకత్వ డిమాండ్ వ్యాకోచత్వం అవుతుంది.

d) Write a short note on multivariable funtion.
బహుముఖ విచలనాల ప్రమేయమును గూర్చి వివరించండి.

Q3) a) Explain rules of partial differentiation.
పాక్షిక అవకలన నియమములను వివరించండి.

b) Find maximum and minimum values for the $y=3x^2-12x+12$
పై ప్రమేయమునకు కనిష్ట మరియు గరిష్ట విలువలను కనుగొనుము.

(or)

c) Find second order partial derivative of $z=x^2+xy+y^2$
$z=x^2+xy+y^2$ యొక్క రెండవ పాక్షిక అవకలనమును కనుగొనుము.

d) If MR = 25, $e_d = 2$ find AR?

MR = 25, $e_d = 2$ అయిన AR ను కనుగొనుము.

Q4) a) Evaluate $\int_1^2 (x^3 + x + 6)\,dx$

$\int_1^2 (x^3 + x + 6)\,dx$ ను విస్తరించుము.

b) Evaluate $\int_1^3 (4x + 4)\,dx$

$\int_1^3 (4x + 4)\,dx$ విస్తరించుము.

(or)

c) Given the demand function $Pd = 4 - x^2$ and the supply function Ps = x+2. Find consumer's and producer's surplus (assuming pure competition)

$Pd = 4 - x^2$, Ps = x+2 అయితే వినియోగదారునియొక్క మరియు ఉత్పత్తిదారునియొక్క మిగులును కనుగొనుము.

Q5) a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ find 2A-B

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన 2A-B విలువ కనుగొనుము.

b) Explain the rules of matrix.

మాత్రికా నియమములను వివరింపుము.

(or)

c) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ అనే మాత్రికకు విలోమ మాత్రికను కనుగొనుము.

d) Solve the following system of equations using Cramer's rule.

క్రామర్ నియమాన్ని ఉపయోగించి సమీకరణాలను సాధించుము.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1;\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$